

Les tours de Hanoï

D'un casse-tête à une démonstration



Une légende

Dans un temple de Hanoï, des moines déplacent **64 disques en or** entre trois tiges de diamant.

- Ils déplacent un disque à la fois, jour et nuit.
- Quand toute la tour aura été déplacée, **ce sera la fin du monde.**

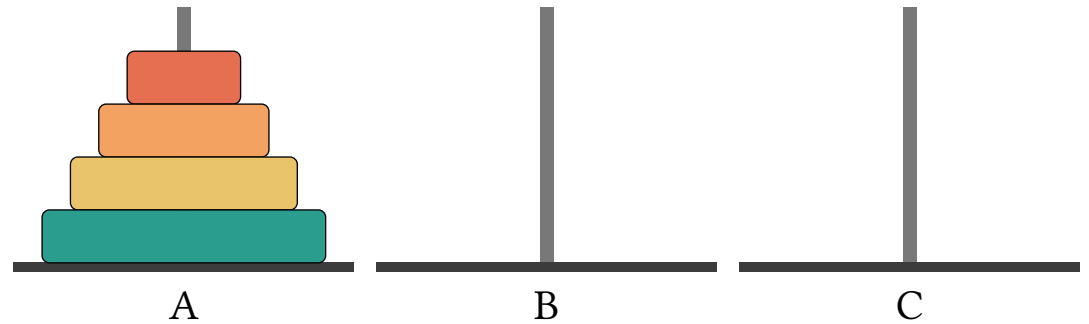
Histoire inventée par le mathématicien français Édouard Lucas en 1883.

Question : faut-il s'inquiéter ?

Les règles

But : déplacer toute la tour de la tige A vers la tige C.

1. On déplace **un seul disque** à la fois.
2. On ne pose jamais un **disque sur un disque plus petit**.



À vous de jouer !

Par deux, résolvez le casse-tête avec 1, 2, 3, puis 4 disques.

Notez le **plus petit nombre de coups** que vous avez trouvé à chaque fois.

Disques n	1	2	3	4	5
Coups					

Pas de tour sous la main ? Jouez en ligne :

<https://urbain.vaes.uk/misc/hanoi/>

ou <https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html>

Bloqués ? Comment avez-vous fait avec 2 disques ? Pouvez-vous le réutiliser ?

Qu'avez-vous trouvé ?

Disques n	1	2	3	4	5
Coups u_n	1	3	7	15	?

Voyez-vous une régularité ?

Deux conjectures

« On double et on ajoute 1 »

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 31$$

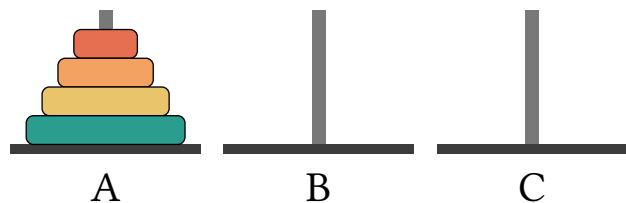
« Une puissance de 2, moins 1 »

$$u_n = 2^n - 1$$

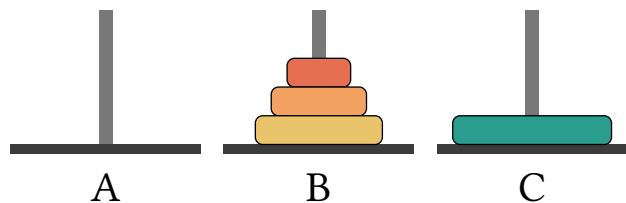
$$2 - 1, \quad 4 - 1, \quad 8 - 1, \quad 16 - 1$$

Ce sont des **conjectures** tirées de 4 exemples. Sont-elles vraies pour tout n ?

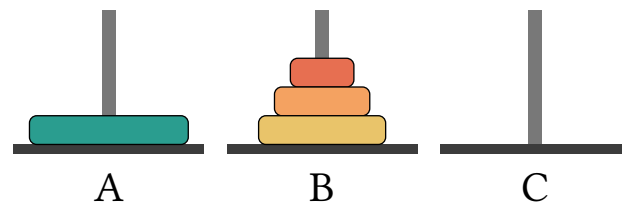
L'idée clé : raisonner récursivement



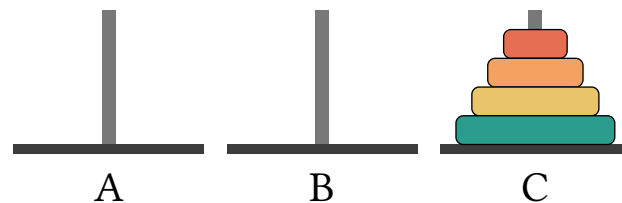
Départ



2. Déplacer le plus grand disque vers C



1. Déplacer les $n - 1$ disques du haut vers B



3. Reposer les $n - 1$ disques dessus

Compter les coups

Pour déplacer n disques :

$$u_n = \underbrace{u_{n-1}}_{\text{étape 1}} + \underbrace{1}_{\text{étape 2}} + \underbrace{u_{n-1}}_{\text{étape 3}} = 2u_{n-1} + 1$$

Récurtivité : résoudre un problème en supposant qu'on sait déjà résoudre une version **plus petite** de ce problème.

Peut-on faire mieux ?

Non ! Cette stratégie est **optimale** :

- À un moment, le **plus grand disque** doit passer de A à C.
- À cet instant, les $n - 1$ autres disques sont tous sur B. $\rightarrow$ au moins u_{n-1} coups avant.
- Ensuite, il faut tous les reposer dessus. $\rightarrow$ au moins u_{n-1} coups après.

Aucune stratégie ne peut donc faire moins de $2u_{n-1} + 1$ coups.

Le raisonnement par récurrence



Pour faire tomber **tous** les dominos, deux choses suffisent :

1. Le **premier** domino tombe.
2. Dès qu'un domino tombe, il fait tomber le **suivant**.

Démontrer que $u_n = 2^n - 1$

Initialisation. $u_1 = 1 = 2^1 - 1$ ✓

Hérédité. Supposons que $u_n = 2^n - 1$ pour un certain n . Alors

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \quad \checkmark$$

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, déplacer n disques demande exactement $2^n - 1$ coups, et pas moins.

Faut-il s'inquiéter ?

Avec 64 disques :

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1,8 \times 10^{19} \text{ coups}$$

- À 1 coup par seconde : environ **585 milliards d'années** (à peu près 40 fois l'âge de l'Univers).
- Un ordinateur faisant 10^9 coups par seconde mettrait encore environ **585 ans**.

Croissance exponentielle : un disque de plus, c'est deux fois plus de travail.

Hanoï et l'écriture binaire

Écrivons le numéro du coup k en binaire. Le disque à déplacer est donné par la position du **1 le plus à droite**.

Coup k	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	00 1	0 1 0	01 1	1 00	10 1	1 1 0	11 1
Disque	1	2	1	3	1	2	1

Résoudre le casse-tête avec n disques, c'est **compter de 1 à $2^n - 1$** .

Une règle sans récursivité

1. Déplacer le **plus petit disque** d'une tige, toujours dans le **même sens** ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \dots$).
2. Jouer l'unique coup possible qui **n'utilise pas** le plus petit disque.
3. Recommencer.

On obtient exactement les mêmes $2^n - 1$ coups.

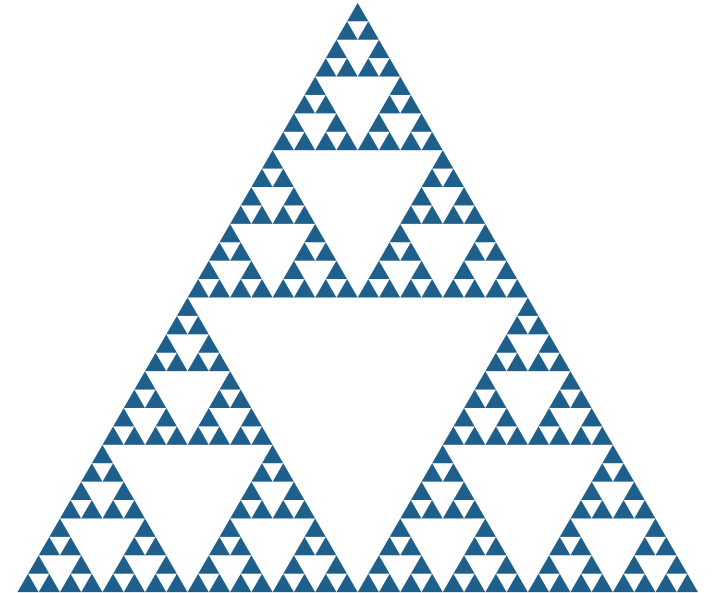
(Avec un nombre impair de disques, tourner dans le sens $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ pour finir sur C.)

Une fractale cachée dans le casse-tête

- Dessinons un point pour chaque position possible (il y en a 3^n).
- Relions deux positions si un seul coup permet de passer de l'une à l'autre.

On obtient le **triangle de Sierpiński** !

La solution optimale suit un côté du triangle, d'un sommet à un autre.



Un problème encore ouvert

Et avec 4 **tiges** ou plus ?

- Frame et Stewart ont proposé leur stratégie en 1941.
- Pour 4 tiges, elle n'a été **démontrée optimale qu'en 2014** (Thierry Bousch).
- Pour 5 tiges ou plus, **personne ne sait** si elle est optimale !

Un casse-tête qu'on peut expliquer à un enfant peut mener à des problèmes encore non résolus.

À vous de jouer : 4 tiges

Avec **4 tiges**, combien de coups faut-il au minimum ?

Disques	3	4	5
3 tiges	7	15	31
4 tiges			

Jouez en ligne (choisir 4 tiges) :

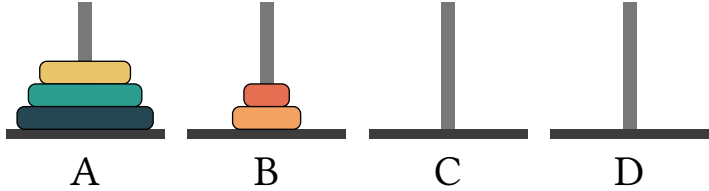
<https://urbain.vaes.uk/misc/hanoi/>

ou <https://towersofhanoi.info/Play.aspx> (puis cliquer sur « Restart »)

Indice : commencez par mettre quelques petits disques de côté.

Frame–Stewart : une stratégie pour 4 tiges

1. Déplacer les k disques du haut vers B, avec **les 4 tiges**.
2. Déplacer les $n - k$ autres vers D avec **3 tiges seulement** : $2^{n-k} - 1$ coups.
3. Reposer les k disques sur D, avec **les 4 tiges**.



Après l'étape 1 ($n = 5, k = 2$)

$$F_n = \min_k (2F_k + 2^{n-k} - 1)$$

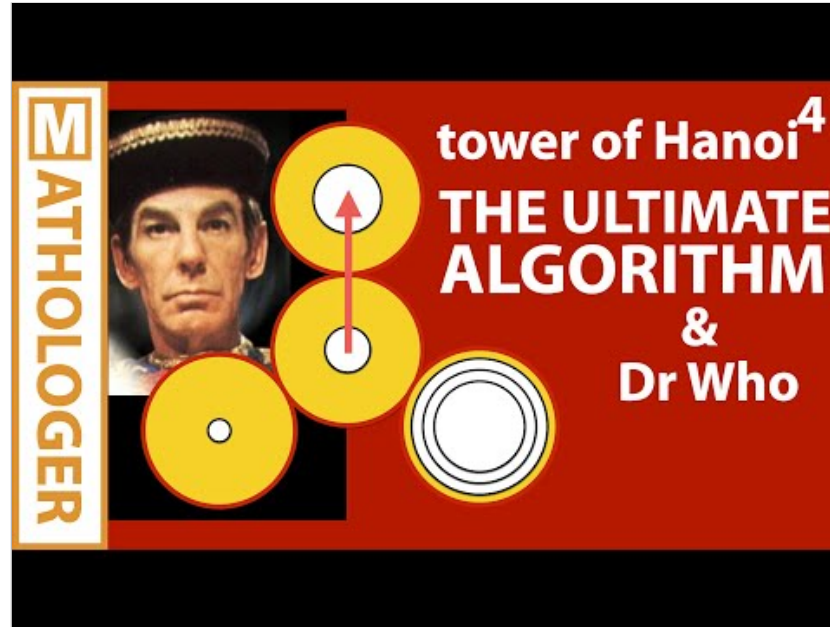
Disques	1	2	3	4	5	6	7	8	64
3 tiges	1	3	7	15	31	63	127	255	$\approx 1,8 \times 10^{19}$
4 tiges	1	3	5	9	13	17	25	33	18 433

Ce que nous avons appris

1. **Expérimenter** et chercher des régularités.
2. Formuler des **conjectures**.
3. Reasonner **récurivement** : se ramener à un problème plus petit.
4. **Démontrer** le résultat par récurrence.
5. La **croissance exponentielle** devient vite gigantesque.

Défi : 5 disques en exactement 31 coups !

Pour aller plus loin



Mathologer — « The ultimate tower of Hanoi algorithm » (en anglais)

<https://www.youtube.com/watch?v=MbonokcLbNo>

Au programme : 4 tiges ou plus, d'étonnantes constantes de Hanoï, et bien plus encore.