



Ecole polytechnique de Louvain  
Université catholique de Louvain

---

**Eléments finis discontinus pour les EDP  
elliptiques du 4<sup>e</sup> ordre**  
Application aux poutres et aux plaques

---

*Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade  
d'ingénieur civil mécanicien*

*Auteur :*  
Urbain Vaes

*Promoteur :*  
Prof. Jean-François Remacle

*Assistants :*  
Dr. Paul-Emile Bernard  
Dr. Thomas Toulorge  
Dr. Jonathan Lambrechts

Juin 2013

## *Remerciements*

*Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin dans la réalisation de ce travail de fin d'études. En particulier, je remercie mon promoteur, Jean-François Remacle, pour son soutien sans faille, son enthousiasme, et ses bons conseils. Je le remercie aussi de m'avoir introduit et donné goût au monde de la recherche. Mes remerciements s'adressent ensuite à Paul-Emile Bernard, Thomas Toulorge, et Jonathan Lambrechts, pour leur aide très appréciée au cours de l'année. Finalement, je remercie ma famille et mes amis, pour leur soutien constant et leur bonne humeur.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Equations des poutres et des plaques</b>	<b>7</b>
1.1	Theorie de l'élasticité en petites déformations . . . . .	7
1.2	Equations des poutres . . . . .	12
1.2.1	Théorie des poutres d'Euler et Bernoulli . . . . .	12
1.2.2	Equation des poutres en grands déplacements . . . . .	15
1.3	Equations des plaques . . . . .	17
1.3.1	Plaques minces de Kirchhoff-Love . . . . .	17
1.3.2	Théorie des plaques en grands déplacements . . . . .	19
1.3.3	Théorie linéaire du flambement des plaques . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Etude de la méthode des éléments finis discontinus pour les poutres</b>	<b>27</b>
2.1	Formulation variationnelle discontinue de Galerkin . . . . .	27
2.2	Méthode numérique . . . . .	32
2.3	Analyse de la méthode . . . . .	33
2.3.1	Equilibre local . . . . .	33
2.3.2	Coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ . . . . .	34
2.3.3	Continuité de $a(\cdot, \cdot)$ . . . . .	39
2.3.4	Convergence de la méthode . . . . .	40
2.3.5	Propriétés de dispersion et dissipation . . . . .	49
2.3.6	Conditionnement du système linéaire . . . . .	53
2.4	Problème de grands déplacements . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Etude de la méthode des éléments finis discontinus pour les plaques</b>	<b>57</b>
3.1	DGM pour les plaques de Kirchhoff-Love . . . . .	57
3.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	57
3.1.2	Traitement de conditions aux limites non homogènes . . . . .	61
3.1.3	Coercivité de la forme bilinéaire . . . . .	63
3.1.4	Convergence de la méthode . . . . .	72
3.1.5	Etude des vibrations libres . . . . .	76
3.2	DGM pour le flambement des plaques minces . . . . .	78
3.2.1	Formulation de Galerkin discontinue . . . . .	78
3.2.2	Quelques problèmes de flambement . . . . .	80



# Symboles et notations

## Dérivées et éléments infinitésimaux

$df/dx$  ou  $f'$  Dérivée de la fonction  $f$  par rapport à la sa variable  $x$ .

$\partial f/\partial x_i$  ou  $f_{,i}$  Dérivée partielle de la fonction  $f$  par rapport à  $x_i$ .

$\dot{f}$  Dérivée partielle de la fonction  $f$  par rapport au temps.

$dV$  Element de volume  $[m^3]$ .

$dA$  Element de surface  $[m^2]$ .

$dl$  Element de longueur  $[m]$ .

## Notations relatives au maillage et à la méthode numérique

$h$  Taille caractéristique du maillage. En une dimension, on définit ce paramètre comme étant la taille moyenne des éléments. En deux dimension, on le définit comme  $h = \sqrt{|\Omega|/N}$ , où  $|\Omega|$  est l'aire du domaine  $\Omega$  et  $N$  le nombre d'éléments. Dans ce cas,  $h^2$  représente l'aire moyenne des éléments.

$\mathcal{K}$  Ensemble des éléments du maillage.

$\mathcal{E}$  Ensemble des arêtes du maillage.

$\mathcal{E}_b$  Ensemble des arêtes appartenant à la frontière du domaine.

$\mathcal{E}_f$  Ensemble des arêtes appartenant à une frontière libre.

$\mathcal{E}_s$  Ensemble des arêtes appartenant à une frontière simplement supportée.

$\mathcal{E}_c$  Ensemble des arêtes appartenant à une frontière encastree.

$\mathcal{E}_i$  Ensemble des arêtes intérieures.

$N_f$  Ensemble des noeuds libres.

$N_c$  Ensemble des noeuds du maillage étant fixes.

$a(\cdot, \cdot)$  Forme bilinéaire de la méthode numérique.

$b(\cdot)$  Forme linéaire de la méthode numérique.

**Indices**

$i, j, k, l$  Indices latins = 1, 2, 3.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  Indices grecs = 1, 2.

**Propriétés liées au matériau et à la géométrie**

E Module de Young  $[N/m^2]$ .

I Moment d'inertie d'une poutre  $[m^4]$ .

$\nu$  Coefficient de Poisson  $[-]$ .

$\rho$  Masse volumique  $[kg/m^3]$ .

D Rigidité flexionnelle des plaques  $[Nm]$ .

**Espaces et normes**

$V_h$  Espace des fonctions de test de la méthode numérique.

$D_p(\mathcal{K})$  Espace de dimension finie contenant les polynômes par morceaux de degré inférieur ou égal à  $p$ , sur le maillage défini par l'ensemble des éléments  $\mathcal{K}$ .

$L_2(\Omega)$  Espace de Hilbert des fonctions carré-intégrables sur  $\Omega$ .

$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  Norme classique associée à l'espace  $L^2(\Omega)$ .

$H^s(\Omega)$  Espace de Sobolev défini par  $H^s(\Omega) = \{v \text{ tel que } D^\alpha v \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq s\}$ , où la notation classique  $D^\alpha$  est telle que définie dans [1] :

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$\|\cdot\|_s$  Norme classique associée à l'espace de Sobolev  $H^s$ , donnée par

$$\|v\|_s = \left( \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

$|\cdot|_s$  Semi-norme classique associée à l'espace de Sobolev  $H^s$  :

$$|v|_s = \left( \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

$\|\|\cdot\|\|$  Norme énergétique liée à la méthode de Galerkin discontinue.

**Tenseurs et vecteurs**

- $\sigma$  Tenseur des contraintes  $[N/m^2]$ .
- $\varepsilon$  Tenseur des déformations infinitésimales  $[-]$ .
- $\mathbf{E}$  Tenseur des déformations de Green-Lagrange  $[-]$ .
- $\mathbf{e}$  Tenseur des déformations d'Euler-Almansi  $[-]$ .
- $x_i = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  Coordonnées dans l'espace tridimensionnel  $[m]$ .
- $x_\alpha = (x, y) = (x_1, x_2)$  Coordonnées dans le plan  $xy$   $[m]$ .
- $(u, v, w)$  Vecteur déplacement de la fibre/surface moyenne  $[m]$ .
- $u_\alpha^0(x, y) = (u, v)$  Composantes dans le plan du déplacement de la surface moyenne  $[m]$ .
- $u_i(x, y, z) = (u_x, u_y, u_z)$  Vecteur déplacement en tout point du solide  $[m]$ .
- $N_{\alpha\beta}$  Efforts dans le plan dans une plaque  $[N/m]$ .
- $M_{\alpha\beta}$  Moments de flexion dans une plaque  $[N]$ .
- $Q_\alpha$  Efforts tranchant dans une plaque  $[N/m]$ .

**Quantités scalaires**

- $M$  Moment de flexion dans une poutre  $[Nm]$ .
- $Q$  Effort tranchant dans une poutre  $[N]$ .
- $N$  Effort axial dans une poutre  $[N]$ .
- $q$  Chargement d'une poutre ou d'une plaque  $[N/m]$  ou  $[N/m^2]$ .
- $\mathcal{A}$  Densité d'énergie interne d'une poutre ou d'une plaque  $[J]$ .
- $\Pi$  Energie potentielle totale d'une poutre ou d'une plaque  $[J]$ .
- $V_e$  Contribution des efforts externes à l'énergie potentielle totale  $[J]$ .



# Introduction

Aujourd'hui les exigences de qualité des méthodes numériques en termes d'efficacité, de robustesse, de flexibilité et de précision ne cessent d'augmenter. Ceci est notamment le cas pour les méthodes numériques utilisées en mécanique du solide, et pour la simulation de poutres et de plaques, objet du présent travail.

## Mise en évidence du problème

Les méthodes d'éléments finis  $C^0$  classiques ne conviennent pas pour la simulation des structures tels que les poutres et les plaques. En effet, la déflexion de ces éléments structuraux étant régie par une équation aux dérivées partielles d'ordre 4, leur énergie potentielle n'est finie que si les champs de déplacement sont dans l'espace de Sobolev  $H^2$ . Prenons par exemple le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli, dont le déplacement transversal est régi par l'équation suivante :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q \quad w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = w(1) = \frac{dw}{dx}(1) = 0,$$

où  $E$  et  $I$  représentent le module de Young et l'inertie de la poutre. On peut montrer que la solution de cette équation minimise la fonctionnelle suivante :

$$\Pi = \int_0^L EI \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - q dx \quad \text{s.c.q.} \quad w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = w(1) = \frac{dw}{dx}(1) = 0.$$

Cette fonctionnelle, qui représente l'énergie potentielle totale, n'est finie que si la solution  $w$  appartient à l'espace  $H^2$ . Ceci permet de comprendre pourquoi les éléments finis  $C^0$  classiques ne conviennent pas pour ce type de problème. De là vient la nécessité d'utiliser une autre méthode. Une solution consiste à utiliser des éléments finis de type  $C^1$ . Pour les poutres, cela ne pose aucun problème étant donné qu'il est facile de trouver un interpolant continu et dérivable. On peut par exemple utiliser les polynômes cubiques de Hermite comme fonctions de forme (voir figure 1), obtenus quand on prend comme degrés de liberté le déplacement et sa dérivée aux noeuds de la discrétisation.

Pour les problèmes bi-dimensionnels, par contre, travailler avec un interpolant  $C^1$  est beaucoup plus difficile, comme expliqué ci-dessous, de sorte que des méthodes différentes

ont été développées. Les principales méthodes développées pour la résolution des problèmes de plaques sont exposées brièvement dans le paragraphe suivant.

### Méthodes classiques de résolution des problèmes de plaques

Une première méthode de résolution des problèmes de plaque est d'utiliser un interpolant  $C^1$ . Sur des maillages triangulaires, la manière la plus simple de réaliser cet objectif est d'utiliser l'élément du cinquième ordre d'Argyris. Une description complète de cet élément est disponible dans [2]. Etant d'ordre 5, cet élément possède 21 degrés de liberté, illustrés sur la figure 2. Cette approche, bien qu'elle fournisse une solution tout à fait correcte, requiert beaucoup de travail et peut être trop chère dans certains cas où une grande précision n'est pas requise.

Une autre approche de résolution est l'utilisation de l'élément quadratique non conforme de Morley, dont les degrés de liberté sont l'évaluation de la fonction aux trois sommets et la dérivée normale aux centres des trois faces. Cet élément, qui est le plus simple pour résoudre les problèmes de plaques, donne lieu à un interpolant qui n'est ni  $C^0$  ni  $C^1$ . Dans le calcul de la matrice de raideur associée à de tels éléments, les sauts de la solution et de ses dérivées sont simplement négligés. L'ordre de convergence de cette méthode est  $\mathcal{O}(h^2)$ , où  $h$  est une grandeur caractérisant la taille moyenne des éléments. Cette méthode offre donc assez peu de flexibilité, et sa vitesse de convergence est limitée.

Etant donné les faiblesses des deux méthodes décrites ci-dessus, on favorise actuellement, pour la simulation des plaques minces, l'utilisation d'une formulation visant à la résolution des équations des plaques de Reissner-Mindlin. La théorie de Reissner et

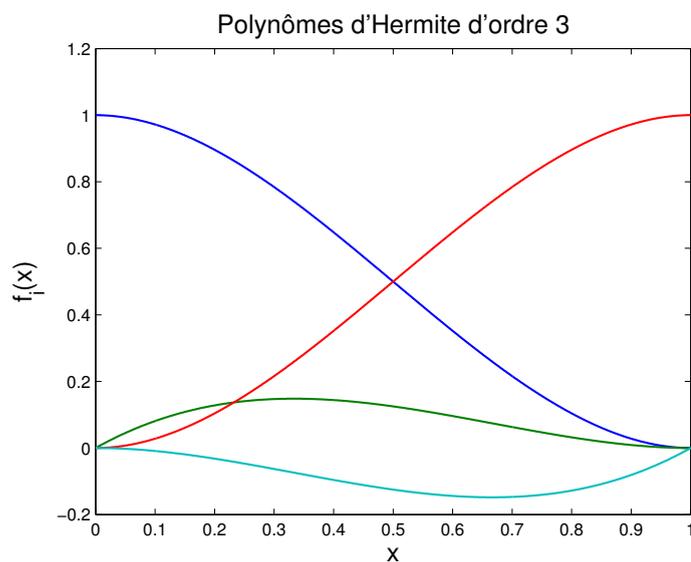


FIGURE 1 – Polynômes utilisés pour la résolution de l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli par éléments finis de type  $C^1$ .

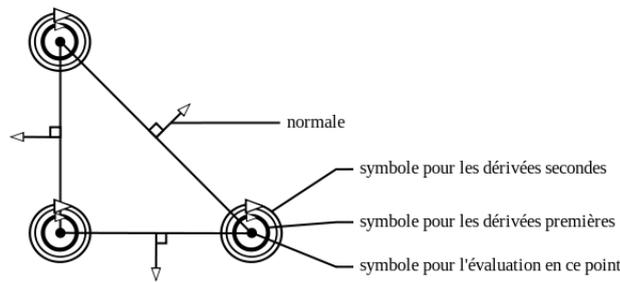


FIGURE 2 – Element d'ordre 5 d'Argyris et les degrés de liberté qui lui sont associés.  
(source de l'image : 2)

Mindlin est en fait une extension à la théorie de Kirchhoff et Love aux plaques épaisses, mais garde sa validité pour la modélisation de plaques minces. Cette approche permet d'utiliser des champs  $C^0$ , et des techniques d'éléments finis classiques, mais souffre de deux difficultés : d'une part, les équations des plaques de Reissner-Mindlin comportent 3 champs, contre une seul dans la théorie de Kirchhoff-Love ; d'autre part, dans la limite des plaques minces, des problèmes de blocage au cisaillement apparaissent. Cette deuxième difficulté peut être résolue en utilisant des techniques de sous-intégration, mais il n'en reste pas moins que cette approche contournée de simulation des plaques minces est assez compliquée.

### Méthodes des éléments finis discontinus

Dans les années 2000, plusieurs nouvelles méthodes numériques ont été développées pour la simulation des plaques, parmi lesquelles les deux méthodes décrites ci-dessous. La première, abrégée C/DG (pour continuous/discontinuous Galerkin), est exposée dans [3]. Cette méthode, basée sur une approximation  $C^0$  de la déflexion, s'applique directement à l'équation des plaques de Kirchhoff-Love, et permet l'utilisation des fonctions de formes lagrangiennes habituelles. Pour obtenir une formulation consistante et stable, des termes de saut doivent alors être ajoutés. Cette méthode fonctionne bien pour résoudre les problèmes de plaques, et diffère principalement des éléments finis  $C^0$  classiques par l'ajout des termes de saut, relatifs à chaque arête du maillage. Elle est beaucoup plus flexible que la méthode d'Argyris, et permet de ne conserver qu'un seul champ inconnu, contrairement aux méthodes dédiées aux plaques de Reissner-Mindlin.

La seconde méthode, qui est l'objet de ce travail, est abrégée DG (pour discontinuous Galerkin), et est basée sur une approximation totalement discontinue de la déflexion. Des termes de saut additionnels sont alors requis afin d'obtenir une formulation consistante et stable, imposant faiblement la continuité de la solution et de son gradient aux arêtes du maillage. Par rapport à la méthode C/DG, la méthode a le désavantage de nécessiter un doublement des degrés de libertés relatifs aux bords du triangle. La taille du problème est donc plus grande, et avec elle le temps de résolution des systèmes linéaires. De plus,

les termes de saut sont plus nombreux et compliqués, rendant leur assemblage plus lent. En contrepartie, la méthode est encore plus flexible, puisqu'elle ne requiert même pas de trouver un interpolant  $C^0$  de la déflexion. Par conséquent, des fonctions de formes monomiales peuvent être utilisées sur l'élément parent, et il est extrêmement facile de changer le degré d'approximation de la méthode. Ce dernier peut même être choisi différent sur chaque élément. Cette propriété (p-adaptation), spécifique à la méthode de Galerkin discontinue, permet d'améliorer localement la précision de la méthode en augmentant le degré des polynômes utilisés. En outre, la méthode des éléments finis discontinus permet d'imposer très facilement tout type de conditions aux limites, et elle jouit d'un taux de convergence optimal. Pour finir, et c'est là un de ses grands avantages, la méthode permet d'obtenir une matrice de masse bloc-diagonale, rendant plus simple l'intégration temporelle des problèmes dynamiques, et permettant une grande parallélisation du programme. Cette méthode semble donc bien remplir les exigences de précision, robustesse et flexibilité des méthodes numériques. Pour ce qui est de son efficacité, la méthode est plus lente que la méthode C/DG pour les problèmes statiques, mais cette faiblesse peut être compensée par les atouts qu'elle possède pour les simulations dynamiques, explicités ci-dessus.

## Contenu du rapport

Durant le travail de fin d'études dont ce document est le rapport, la méthode des éléments finis discontinus a été développée pour divers problèmes concernant les poutres et les plaques, sur base des travaux présentés dans [3–5]. La méthode a été implémentée en langage *python*, et ensuite analysée. La raison pour laquelle la méthode de Galerkin discontinue pour la simulation des poutres est étudiée, malgré son faible intérêt pratique, est qu'elle partage une grande similarité avec la méthode utilisée pour les plaques, et de nombreux résultats prouvés pour les poutres sont directement transposables à ces dernières, tout en étant plus simples à montrer.

Dans le chapitre 1, les équations de base de la théorie des poutres et des plaques sont rappelées. Les équations des poutres d'Euler-Bernoulli et des plaques de Kirchhoff-Love sont dérivées en utilisant une approche classique, tandis que les équations des poutres et des plaques dans le régime des petites déformations-grands déplacements sont obtenues par une approche énergétique. Cette seconde approche a un double avantage : elle donne directement les conditions aux limites du problème et présente une certaine similarité avec la formulation variationnelle de la méthode de Galerkin discontinue développée plus tard. Les différentes équations rappelées dans ce chapitre seront traitées dans les chapitres suivants par la méthode des éléments finis discontinus.

Au chapitre 2, la méthode des éléments finis discontinus est développée et analysée pour la simulation des poutres. Entre autres choses, la convergence optimale de la méthode est prouvée pour un degré d'interpolation polynomiale supérieur ou égal à 3, sur base

des travaux de Hansbo et Larson présentés dans [4], et les propriétés de dispersion et de dissipation de la méthode sont étudiées et utilisant les idées de Hu et Atkins [6]. Des bornes précises sur les paramètres de stabilisation de la méthode sont aussi obtenues, sur base des travaux de Warburton [7] concernant les inégalités inverses de trace.

Dans le dernier chapitre, la méthode de Galerkin discontinue est appliquée à la simulation des plaques. Par rapport à la formulation donnée dans [4], des nouveaux termes sont ajoutés pour pouvoir tenir compte des frontières libres. La stabilité de la méthode est ensuite étudiée, et sa convergence optimale est vérifiée sur plusieurs cas-tests. La méthode est aussi appliquée à un problème aux valeurs propres pour déterminer les modes de vibration libre d'une plaque. Pour finir, la méthode est étendue aux problèmes de flambement, et utilisée pour déterminer les modes et charges critiques de flambement d'une plaque dans diverses configurations.



# Chapitre 1

## Equations des poutres et des plaques

Dans ce chapitre, on rappelle de manière concise les équations des poutres et des plaques, qui sont traitées dans la suite du texte par la méthode de Galerkin discontinue. Les équations sont développées d'une part dans le cadre des petites perturbations, et d'autre part dans la théorie des petites déformations - grands déplacements, à partir des principes de base de la mécanique des milieux continus et de l'élasticité linéaire isotrope.

### 1.1 Théorie de l'élasticité en petites déformations

La mécanique des milieux continus nous permet d'écrire la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la manière suivante :  $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}$ . En statique, le terme d'inertie s'annule et l'équation est :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0. \quad (1.1)$$

La résolution des problèmes d'élasticité est basée sur cette équation, ainsi que sur une loi de comportement, liant le tenseur des contraintes à un tenseur des déformations. Trois tenseurs des déformations sont classiquement utilisés : le tenseur des déformations de Green-Lagrange, celui d'Euler-Almansi, et le tenseur des déformations infinitésimales. On les dénote  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{E}$ , et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Pour les définir, notons  $\mathbf{X}$  les coordonnées d'un point dans une configuration de référence  $\mathcal{R}_0$ , et  $\mathbf{x}$  ses coordonnées dans une autre configuration  $\mathcal{R}_1$ , et intéressons nous à un segment élémentaire de matière de vecteur associé  $d\mathbf{X}$  dans la configuration  $\mathcal{R}_0$ . Dans la configuration  $\mathcal{R}_1$ , ce segment est associé au vecteur  $d\mathbf{x}$ , dont les composantes sont données par :

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad \leftrightarrow \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X},$$

où on a introduit  $\mathbf{F}$ , le jacobien de la transformation de la configuration  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}_1$ . Suite à la transformation de  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}_1$ , il est probable que le segment élémentaire de matière ait changé de taille. On a en fait :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{X}^2 &= (\mathbf{F} d\mathbf{X})^T (\mathbf{F} d\mathbf{X}) - d\mathbf{X}^2 \\ &= d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par définition, les tenseurs des déformations de Green-Lagrange et Euler-Almansi sont donnés par :  $\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}$  et  $\mathbf{e} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$ . Introduisons maintenant le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , qui par définition s'écrit  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ . On peut réécrire les composantes des tenseurs précédents en fonction de ce champ de déplacement :

$$\begin{aligned} 2 E_{ij} &= F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij} = \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \\ 2 e_{ij} &= \delta_{ij} - F_{ki}^{-1} F_{kj}^{-1} = \delta_{ij} - \left( \delta_{ik} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left( \delta_{jk} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dans la limite  $u \rightarrow 0$ , on a  $x \approx X$ , et les deux tenseurs des déformations tendent vers le tenseur des déformations infinitésimales, défini comme la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

On fera tout au long de ce texte l'hypothèse des petites déformations, qui s'exprime comme suit :  $e_{ij}, E_{ij} \ll 1$ . Contrairement à ce qu'on pourrait croire, cette hypothèse seule ne permet pas de conclure que les tenseurs  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{E}$  tendent vers  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Il suffit pour s'en convaincre de considérer un mouvement de rotation rigide, qui n'occasionne aucune déformation, bien qu'un calcul donnerait  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ . Dans le cas de petites déformations, la physique montre que le tenseur des contraintes de Cauchy dépend de manière linéaire du tenseur des déformations. La loi de comportement classique de l'élasticité linéaire isotrope est la suivante :

$$\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \mathbf{e} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\mathbf{e}) \boldsymbol{\delta} \right). \quad (1.3)$$

Cette relation est abrégée  $e_{ij} = c_{ijkl} \sigma_{kl}$ , où  $\mathbf{c}$  est le tenseur de Hooke. L'hypothèse des petites déformations implique aussi que  $\mathbf{F}^T \approx \mathbf{F}^{-1}$ , puisque  $\mathbf{E} \approx \mathbf{0}$ . En d'autres termes,  $\mathbf{F}$  est essentiellement une matrice de rotation. Par le théorème de la décomposition polaire, le jacobien de la transformation  $\mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{R}^1$  peut se décomposer comme un produit de deux autres tenseurs :  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ , où  $\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal, correspondant à

une rotation, et  $\mathbf{U}$  est un tenseur symétrique. L'hypothèse des petites déformations permet d'écrire le jacobien de la transformation comme  $\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{A})$ , où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité,  $\epsilon$  est un paramètre petit devant 1, et  $\mathbf{A}$  est un tenseur symétrique de norme bornée par une constante. Dans ce cas, on a :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} = 2\epsilon \mathbf{A} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

et les déformations sont de l'ordre de  $\epsilon \ll 1$ . En utilisant le fait que  $\mathbf{F}\mathbf{F}^T \approx \mathbf{I}$ , la loi de comportement peut s'écrire de manière équivalente en terme du tenseur des déformations de Green-Lagrange, en notant que  $\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}$  :

$$\mathbf{E} = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{S} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\mathbf{S}) \boldsymbol{\delta} \leftrightarrow \mathbf{S} = \frac{E}{1+\nu} \left( \mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\mathbf{E}) \boldsymbol{\delta} \right).$$

où on a introduit le tenseurs des contraintes  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}$ . Notons que ce tenseur est en fait le second tenseur de Piola-Kirchoff dans la limite des petites déformations. Pour plus d'information sur ce tenseur et sur l'équation constitutive qui le lie au tenseur des déformations de Green-Lagrange, le lecteur peut se référer à [8].

A la supposition que les déformations sont petites, on ajoute souvent l'hypothèse que les déplacements sont aussi petits. Ces deux suppositions forment ensemble l'hypothèse des petites perturbations. Afin de pouvoir développer dans la suite les équations des structures en grands déplacements, on ne fera pas cette hypothèse à ce stade. L'hypothèse sera par contre utilisée dans la suite pour la dérivation des équations des poutres d'Euler-Bernoulli et des plaques de Kirchhoff-Love.

En général la force de volume  $\mathbf{f}$  est le résultat de la gravité, et découle en fait d'une force par unité de masse. La force par unité de volume dépend donc du changement de volume du matériau, dépendant lui-même du champ de déformations. Néanmoins, en petites déformations, les changements de volume sont négligeables, et par conséquent il est cohérent de parler de force par unité de volume. On suppose, pour que le problème soit bien défini, que la force de volume à laquelle est soumise un volume matériel ne dépend que de ses coordonnées dans la configuration de référence, et ne dépend donc pas du champ de déplacement.

Du point de vue des conditions aux frontières, elles sont de deux types : sur une partie de la frontière, notée  $\Gamma_U$ , le déplacement est imposé, tandis que sur l'autre partie de la frontière, notée  $\Gamma_F$ , c'est la contrainte qui est imposée. Pour que le problème soit bien défini,  $U_i$  et  $F_i$  sont définis sur les frontières de la configuration de référence. Comme on travaille en petites déformations, les surfaces sont pratiquement inchangées, et par conséquent la force s'appliquant sur une surface matérielle ne change pas au cours du déplacement. On note les deux conditions de la manière suivante

$$u_i = U_i(X_k) \quad \text{sur } \Gamma_U \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} n_j = F_i(X_k) \quad \text{sur } \Gamma_F.$$

La solution du problème statique est telle que les équations 1.1, 1.2, et 1.3 soient satisfaites, ainsi que les deux conditions aux limites ci-dessus.

Pour une certaine configuration de la structure, on définit l'énergie interne comme suit :

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_{V_{\mathcal{R}_1}} \sigma_{ij} e_{ij} dV \approx \frac{1}{2} \int_{V_{\mathcal{R}_0}} S_{ij} E_{ij} dV.$$

L'équivalence entre les deux expressions vient du fait que, comme on travaille en petites déformations, les volumes sont quasi-inchangés, d'où l'absence du déterminant du jacobien dans l'expression. De plus, en petites déformations,  $\mathbf{F}^{-1} \approx \mathbf{F}^T$ , et donc, en utilisant le fait que  $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$  pour toutes matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$S_{ij} E_{ij} = tr(\mathbf{SE}) = tr(\mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}) \approx tr(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}) = \sigma_{ij} e_{ij}.$$

Abordons à présent le principe des travaux virtuels. On considère pour cela une variation admissible  $\delta \mathbf{u}$  du champ de déplacement. Un champ de déplacement est dit cinématiquement admissible s'il satisfait les conditions aux limites relatives au déplacement. Une variation admissible  $\delta \mathbf{u}$  de ce champ est donc telle que  $\delta \mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_U$ . Une telle variation du champ de déplacement va conduire la structure dans une nouvelle configuration  $\mathcal{R}_2$ . On note  $\tilde{x}(x)$  la transformation de la configuration  $\mathcal{R}_1$  à  $\mathcal{R}_2$ , et  $\mathbf{G}$  le jacobien de cette transformation. Le jacobien de la transformation de  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}_2$ , noté  $\mathbf{H}$ , est le suivant :

$$H_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = G_{ik} F_{kj}.$$

On en déduit une expression des composantes du tenseur des déformations d'Almansi-Euler associé à la transformation  $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_2$  :

$$\mathbf{e} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^{-T} \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{G}^{-T} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}^{-1}.$$

Si on suppose de plus que le champ de déplacement  $\delta \mathbf{u}$  est infinitésimal, alors  $\mathbf{e}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{e}(\mathbf{x})$ . En utilisant le fait que les déformations sont petites, on trouve, après calcul et élimination des termes négligeables, que la variation du champ de déformation est alors :

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right).$$

Grâce à cette expression, on peut prouver le principe des travaux virtuels, qui énonce que le travail fait par les efforts extérieurs dans toute variation admissible du champ de déplacement est égale à la variation correspondante de l'énergie interne, ce qui implique que pour toute variation  $\delta \mathbf{u}$  admissible :

$$\Delta = \int_{V_{\mathcal{R}_1}} \sigma_{ij} \delta e_{ij}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_{V_{\mathcal{R}_1}} f_i \delta u_i dV - \int_{\Gamma_F(\mathcal{R}_1)} F_i \delta u_i dA = 0.$$

Le premier terme de cette expression correspond à la variation de l'énergie interne, obtenu en utilisant la loi de Hooke et l'hypothèse des petites déformations, tandis que les deux autres termes correspondent au travail fait par les forces extérieures. Ce résultat peut être montré en se servant de la relation  $T_{ij}^A T_{ij}^S = 0$ , valable pour toute paire de tenseurs antisymétrique et symétrique, et en utilisant l'intégration par parties multidimensionnelle :

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{V_{\mathcal{R}_1}} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV - \int_{V_{\mathcal{R}_1}} f_i \delta u_i dV - \int_{\Gamma_F(\mathcal{R}_1)} F_i \delta u_i dA \\ &= - \int_{V_{\mathcal{R}_1}} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) \delta u_i dV + \int_{\partial V_{\mathcal{R}_1}} \sigma_{ij} \delta u_i n_j dV - \int_{\Gamma_F(\mathcal{R}_1)} F_i \delta u_i dA. \end{aligned}$$

Le premier terme s'annule car  $\mathbf{u}$  est solution du problème, et par conséquent l'équation d'équilibre est satisfaite. D'autre part, en se rappelant que  $\delta \mathbf{u}$  est une variation admissible, que  $\partial V = \Gamma_U \cup \Gamma_F$ , et en utilisant les conditions aux limites, on trouve que les deux autres termes s'annulent aussi :

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_{\mathcal{R}_1}} \sigma_{ij} \delta u_i n_j dV - \int_{\Gamma_F(\mathcal{R}_1)} F_i \delta u_i dA \\ = \int_{\Gamma_U(\mathcal{R}_1)} \sigma_{ij} \delta u_i n_j dV + \int_{\Gamma_F(\mathcal{R}_1)} (\sigma_{ij} n_j - F_i) \delta u_i dA = 0. \end{aligned}$$

Le principe des travaux virtuels est lié au principe de minimisation de l'énergie potentielle, selon lequel la solution du problème est celle qui, parmi tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles, minimise l'énergie potentielle totale. Cette dernière est définie comme suit dans la configuration de référence :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_{\mathcal{R}_0}} S_{ij} E_{ij} dV - \int_{V_{\mathcal{R}_0}} f_i u_i dV - \int_{\Gamma_F(\mathcal{R}_0)} F_i u_i dA.$$

Pour justifier ce principe, on considère la variation de l'énergie potentielle totale engendrée par une variation admissible  $\delta \mathbf{u}$  du champ de déplacement. En utilisant de nouveau le fait que les volumes et surfaces sont quasi-conservés car on travaille en petites déformations, on a que :

$$\delta \Pi = \delta \mathcal{I}(\delta \mathbf{u}) - \int_{V_{\mathcal{R}_1}} f_i \delta u_i dV - \int_{\Gamma_F(\mathcal{R}_1)} F_i \delta u_i dA = 0.$$

La dernière égalité découle du principe des travaux virtuels. Comme la quantité  $\sigma_{ij} e_{ij} = c_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$  est une forme quadratique en  $e_{ij}$ , dont les valeurs propres sont toutes positives, on peut montrer que l'état d'équilibre correspond en fait à un minimum de l'énergie potentielle totale. Ce principe énergétique nous permettra de développer dans la suite de ce chapitre la théorie des poutres et des plaques en grands déplacements.

## 1.2 Equations des poutres

Dans cette section, la théorie classique d'Euler et Bernoulli est d'abord rappelée, et la théorie des poutres en grandes déformations est ensuite abordée.

### 1.2.1 Théorie des poutres d'Euler et Bernoulli

Pour dériver l'équation de base de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, on fait l'hypothèse des petites perturbations. Cette hypothèse revient à supposer que la configuration de la structure étudiée après chargement est quasi-confondue avec sa configuration initiale. Il n'est donc pas nécessaire de considérer deux configurations distinctes. On a donc dans ce cas  $\mathbf{E} = \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}$ . La loi de comportement liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations s'écrit alors de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\delta} \right).$$

Nous considérons dans cette section une poutre droite, de longueur  $L$ , de diamètre maximal  $H$ , et orientée dans la direction  $x$ . On suppose que le plan  $x = 0$  correspond à l'extrémité gauche de la poutre, et que les points de l'espace sont repérés dans le plan  $yz$  par rapport à la fibre moyenne.

On considère de plus que la poutre est soumise à un chargement  $q(x)$  [ $N/m$ ] dans la direction  $z$ , et on définit les efforts internes comme suit :

$$Q(x) = \int_A \sigma_{13} dA \quad M(x) = \int_A \sigma_{11} z dA.$$

Dans ces expressions,  $A$  correspond à la section droite de la poutre, supposée uniforme. Il est bien connu que l'équilibre statique des forces implique que les fonctions  $M$ ,  $Q$ , et  $q$  sont liées par les équations suivantes :

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \quad \frac{dQ}{dx} + q = 0.$$

Dans le cas d'un problème isostatique,  $M$  et  $T$  peuvent être déterminés en utilisant ces deux équations ainsi que les conditions aux limites du problème. Dans tous les cas, on établit en combinant les deux équations que :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0. \quad (1.4)$$

Cette équation est générale, et ne repose que sur l'hypothèse des petites perturbations. Pour déterminer le champ de déplacement dans la poutre, ainsi que les champs de contraintes et de déformations, la théorie développée par Euler et Bernoulli est utilisée. Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

1. Tout plan matériel perpendiculaire à la fibre moyenne dans la configuration initiale de la poutre reste plan et perpendiculaire à la fibre moyenne dans la configuration déformée. Il est prouvé dans [9] cette hypothèse est vérifiée quand on fait tendre  $H/L$  vers 0 dans la théorie plus générale des poutres de Timoshenko.
2. L'hypothèse des petites perturbations, déjà introduite précédemment, est toujours d'application. Cela implique en particulier que le rayon de courbure de la poutre en tout point est bien plus grand que les dimensions de celle-ci.
3. Il est supposé que la contrainte  $\sigma_{11}$  est beaucoup plus importantes que les autres, qui sont négligeables par rapport à celle-ci. Cette hypothèse, qui se vérifie très bien dans le cas de poutre élancées, est justifiée dans [10].

Dans la suite,  $\mathbf{u}(x) = (u, v, w)$  représente le déplacement de la fibre moyenne, tandis que  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z) = (u_x, u_y, u_z)$  est le déplacement d'un point quelconque de la poutre. Les deux premières hypothèses ci-dessus permettent de déterminer le champ de déplacement approximatif dans la poutre :

$$\begin{cases} u_x = -z w' \\ u_y = 0 \\ u_z = w. \end{cases}$$

A partir de cette expression du champ de déplacement, on obtient les composantes du tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -z w'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce tenseur des déformations doit être vu comme une approximation du tenseur des déformations réel. En effet, par la troisième hypothèse plus haut, la seule contrainte non-négligeable est  $\sigma_{11}$ , et il est clair qu'un tel état de contraintes devrait engendrer des déformations dans les directions transversales. En utilisant la loi de comportement, une relation est établie entre  $\varepsilon_{11}$  et  $\sigma_{11}$ .

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta} \Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \Rightarrow \sigma_{11} = -z E w''.$$

D'où l'expression suivante de  $M$  en terme du déplacement transversal de la fibre moyenne :

$$M(x) = \int_A \sigma_{11} z dA = -E w'' \int_A z^2 dA = -EI w''.$$

En utilisant cette expression dans l'équation 1.4, l'équation classique de la théorie des poutres d'Euler et Bernoulli est obtenue :

$$(EI w'')'' = q.$$

Dans la suite, on supposera souvent, qu'en plus d'être de section uniforme, la poutre étudiée est homogène. Dans ce cas l'équation à résoudre est  $EI w'''' = q$ .

## Conditions aux limites

Dans la théorie des poutres, on distingue trois types de conditions aux limites :

1. Extrémité libre : Dans ce cas, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont tous les deux nuls, ce qui s'écrit :

$$M = -EI w'' = 0 \quad \text{et} \quad Q = -EI w''' = 0.$$

2. Extrémité simplement supportée : Pour une frontière simplement supportée, la translation verticale est bloquée, mais la rotation est libre, et le moment de flexion est donc nul :

$$M = -EI w'' = 0 \quad \text{et} \quad w = 0.$$

3. Extrémité encastree : Dans ce cas, la translation verticale et la rotation de la poutre sont empêchées :

$$w' = 0 \quad \text{et} \quad w = 0.$$

On pourrait aussi considérer des cas plus compliqués, où, par exemple, le déplacement d'une des frontières est imposé à une valeur non nulle. Néanmoins, pour la simplicité des équations, ces cas ne sont pas considérés ici.

## Equation dynamique

L'accélération d'un point de la poutre peut être obtenue à partir du champ de déplacement dérivé précédemment :

$$\begin{cases} \ddot{u}_x = -z \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \\ \ddot{u}_y = 0 \\ \ddot{u}_z = \ddot{w}. \end{cases}$$

Pour une poutre fine,  $\ddot{u}_x/\ddot{u}_z = \mathcal{O}(z/L) \ll 1$ . L'accélération dans la direction  $x$  est donc négligeable devant l'accélération dans la direction  $z$ . On peut montrer, en utilisant le même raisonnement que précédemment, que l'équilibre vertical des forces donne l'équation suivante :

$$\frac{dQ}{dx} + q(x) = \int_A \rho \ddot{u}_z dA = \rho A \ddot{w},$$

tandis que la relation liant  $M$  et  $Q$  est inchangée si on néglige l'accélération dans la direction  $x$ . On en déduit l'équation de la dynamique des poutres d'Euler-Bernoulli :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.$$

avec  $\mu = \rho A$ .

### 1.2.2 Equation des poutres en grands déplacements

L'équation des poutres en grands déplacements est maintenant étudiée, sur base de [9, 11]. Cette théorie est valide lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- D'une part, on utilise cette théorie lorsque le dernier terme du tenseur des déformations de Green-Lagrange, dont l'expression est donnée ci-dessus, n'est pas négligeable devant les deux premiers

$$2 E_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}.$$

Dans ce cas, la configuration déformée diffère de la configuration initiale, et les résultats que nous avons obtenus ci-dessus ne sont pas d'application. On suppose néanmoins toujours que les déformations sont petites.

- D'autre part, cette théorie repose sur l'hypothèse que les rotations sont suffisamment petites pour considérer que le champ de déplacement s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_x = -z w' + u \\ u_y = 0 \\ u_z = w. \end{cases}$$

Afin de considérer plus tard des problèmes de flambement, un terme de déplacement axial est ajouté dans le champ de déplacement.

Pour alléger et uniformiser les notations par rapport à la section précédente, on utilisera dans la suite la notation  $(x, y, z)$  pour désigner les coordonnées d'un point matériel dans la configuration non-déformée. On utilisera aussi  $\varepsilon$  pour désigner le tenseur des déformations de Green-Lagrange, et  $\sigma$  pour désigner le tenseur des contraintes dans la configuration de référence, au lieu de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{S}$ .

Comme à la section précédente, le modèle cinématique va nous permettre d'obtenir l'expression des déformations. En utilisant la définition du tenseur de Green-Lagrange, on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= -z w'' + u' + \frac{1}{2} \left[ (-z w'' + u')^2 + w'^2 \right]. \end{aligned}$$

Si les déformations sont de l'ordre de  $\epsilon \ll 1$ , alors le terme  $(-z w'' + u')^2$  est de l'ordre de  $\epsilon^2$ , et il est négligeable devant les deux premiers termes. Par contre, le dernier terme, d'habitude négligé dans la théorie classique, est conservé dans la théorie des grands déplacements, et on a donc :

$$\varepsilon_{11} = -z w'' + u' + \frac{1}{2} w'^2.$$

Cette expressions nous permet, de la même manière que dans la section précédente, d'obtenir une expression de la contrainte  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} = -E z w'' + E u' + \frac{1}{2} E w'^2.$$

A partir de cette expression, on calcule les efforts internes comme suit :

$$M(x) = \int_A \sigma_{11} z dA = -EI w'' \quad N(x) = \int_A \sigma_{11} dA = EA \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right).$$

Pour dériver l'équation différentielle régissant la déflexion de la poutre, une approche basée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale est utilisée. Afin d'écrire une expression de cette dernière, on suppose qu'en plus d'être soumise à un chargement  $q(x)$  orienté suivant  $\hat{e}_z$ , la poutre est soumise à une force de traction axiale  $P$  à son extrémité droite, tandis que le déplacement axial est empêché à son extrémité gauche. L'énergie potentielle totale s'exprime alors de la manière suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{11} \varepsilon_{11} dV - \int_0^L q(x) w(x) dx - Pu(L).$$

En remplaçant  $\sigma_{11}$  et  $\varepsilon_{11}$  par leurs expressions, on obtient après calcul :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L -M w'' + N u' + \frac{1}{2} N w'^2 dx - \int_0^L q(x) w(x) dx - Pu(L).$$

La variation de cette fonctionnelle, pour une variation  $\delta u$  de  $u$ , est donnée par :

$$\delta \Pi = \int_0^L N \delta u' dx - P \delta u(L),$$

d'où en intégrant par parties :

$$\delta \Pi = - \int_0^L N' \delta u dx + (N(L) - P) \delta u(L) - N(0) \delta u(0).$$

En vertu du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale, cette expression doit être nulle pour toute variation admissible  $\delta u$ . Si le mouvement axial de la poutre est bloqué en 0, alors  $\delta u(0) = 0$  si  $\delta u$  est une variation admissible. L'annulation de la variation de l'énergie potentielle totale implique alors  $N' = 0$  et  $N(L) = P$ , d'où  $N(x) = P$ .

On considère maintenant une variation  $\delta w$  du champ  $w$ . La variation correspondante de l'énergie potentielle totale est :

$$\delta \Pi = \int_0^L -M \delta w'' + N w' \delta w' dx - \int_0^L q(x) w(x) dx.$$

En intégrant par parties, et en utilisant le fait que  $N(x) = P$ , cette expression devient :

$$\delta\Pi = \int_0^L (-M'' - Pw'')\delta w \, dx + [(M' + Pw')\delta w]_0^L - [M\delta w']_0^L - \int_0^L q(x)w(x) \, dx.$$

L'annulation de cette variation donne l'équation différentielle satisfaite par  $w$  :

$$(EI w'')'' - Pw'' = q(x).$$

Le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale donne aussi les conditions aux limites du problème. Pour une extrémité encastree, les variations  $\delta w$  et  $\delta w'$  sont toutes les deux nulles si  $\delta w$  est une variation admissible. Les termes liés à cette frontière sont donc identiquement nuls. Pour une extrémité simplement supportée, seul la variation  $\delta w$  est nulle à l'extrémité, et  $\delta w'$  peut prendre n'importe quelle valeur. L'équation précédente implique donc que le moment de flexion  $M$  s'annule à l'extrémité. Pour finir, une extrémité libre doit satisfaire à la fois  $M = 0$  et  $(M' + Pw') = 0$ .

## 1.3 Equations des plaques

Dans cette section, l'équation fondamentale de la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love est d'abord dérivée. La preuve étant classique, et ressemblant fort à celle faite pour la poutre de Bernoulli, elle est simplement esquissée. Dans un second temps, une preuve complète basée sur la minimisation de l'énergie potentielle est développée, pour trouver les équations régissant les plaques en grands déplacements.

### 1.3.1 Plaques minces de Kirchhoff-Love

La démarche suivie dans cette section suit celle du cours *MECA2520 : Complément d'élasticité, Calcul de structures planes* [10]. On considère une plaque dont la surface moyenne correspond au plan d'équation  $z = 0$  dans la configuration non déformée. La théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love repose sur quatre hypothèses de base :

- Les segments initialement perpendiculaires à la surface moyenne restent droits et perpendiculaires à la surface moyenne.
- Les segments perpendiculaires à la surface moyenne ne changent pas de taille au cours de la déformation.
- L'hypothèse des petites perturbations est vérifiée, c'est à dire que le déplacement transversal de la plaque est petit par rapport à l'épaisseur de celle-ci.
- La contrainte hors du plan  $\sigma_{33}$  est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan.

Finalement, il sera supposé dans cette section, pour la simplicité, que le déplacement de la surface moyenne est limité à l'axe  $z$ , ce qui est le cas dans la théorie de Kirchhoff et Love en l'absence d'efforts appliqués dans le plan de la surface moyenne. Les deux

premières hypothèses nous permettent d'obtenir le champ de déplacement en tout point de la plaque, de la même manière que pour la théorie des poutres :

$$\begin{cases} u_x = -w_{,x} z \\ u_y = -w_{,y} z \\ u_z = w. \end{cases} \quad (1.5)$$

En utilisant ces expressions dans la définition du tenseur des déformations infinitésimales, on obtient :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -w_{,xx} z & -w_{,xy} z & 0 \\ -w_{,xy} z & -w_{,yy} z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La loi de comportement de l'élasticité linéaire peut maintenant être utilisée, d'où on déduit, en utilisant l'hypothèse que  $\sigma_{33}$  est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

En inversant cette relation, il est suït que

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Cette relation peut s'écrire en notation tensorielle de la manière suivante :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1 - \nu^2} ((1 - \nu)\varepsilon_{\alpha\beta} + \nu\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}).$$

Dans cette expression, et dans le reste de ce travail, les indices grecs prennent les valeurs 1 ou 2.

Pour les plaques, les efforts internes sont définis comme suit :

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dz \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz.$$

Comme  $\sigma$  est symétrique, il en est de même pour  $M$ . En utilisant l'expression de  $\sigma_{\alpha\beta}$ , les tenseurs des moments peuvent s'écrire en terme du déplacement transversal de la surface moyenne :

$$M_{\alpha\beta} = -D\nu w_{,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - D(1 - \nu)w_{,\alpha\beta}, \quad (1.6)$$

où  $D$  est la rigidité flexionnelle de la plaque, définie par

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

D'autre part, il est possible de montrer (voir par exemple [10]) que les équations de l'équilibre statique de la mécanique des milieux continus impliquent :

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + q = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $q$  est le chargement appliqué à la plaque dans la direction  $z$ . La première équation découle de l'équilibre rotationnel de la plaque, tandis que la seconde découle de l'équilibre des forces dans la direction verticale. En prenant la divergence de la première équation, et en faisant usage de la symétrie de  $M$ , l'équation suivante est obtenue :

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + q = 0.$$

L'équation de base de la théorie des plaques s'obtient alors en substituant  $M_{\alpha\beta}$  dans cette équation par son expression dans l'équation 1.6, ce qui donne :

$$\begin{aligned} -D\nu w_{,\gamma\gamma\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} - D(1-\nu) w_{,\alpha\beta\alpha\beta} &= -q \\ \Leftrightarrow D\nu w_{,\gamma\gamma\alpha\alpha} + D(1-\nu) w_{,\alpha\beta\alpha\beta} &= q \\ \Leftrightarrow D w_{,\alpha\alpha\beta\beta} &= q. \end{aligned}$$

On peut réécrire cette équation en faisant apparaître l'opérateur laplacien :

$$\Delta\Delta w = q.$$

### 1.3.2 Théorie des plaques en grands déplacements

En vue d'étudier à la fin de ce texte le flambement des plaques par la méthode des éléments finis discontinus, on considère dans cette section la théorie des plaques dans le cadre des grands déplacements. Le raisonnement qui suit s'appuie en partie sur les documents [11, 12]. La théorie des plaques en grands déplacements nécessite de tenir compte des déplacements de la surface moyenne dans le plan  $xy$ . Dans ce cas, le champ de déplacement est approximé par l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_x = u - w_{,x}z \\ u_y = v - w_{,y}z \\ u_z = w. \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $x, y, z$  représentent les coordonnées dans la configuration de référence, et où  $u$  et  $v$  représentent les déplacements de la surface moyenne selon  $x$  et  $y$ . En grands déplacements, les déformations sont obtenues par le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Ce dernier va insérer un couplage entre le problème de membrane et celui de flexion. Pour uniformiser les notations, on utilise ici aussi les symboles  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , pour désigner le tenseur des déformations de Green-Lagrange et le tenseur des contraintes dans la configuration

de référence. Les déformations sont alors données par :

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Supposons que les déformations soient de l'ordre de  $\epsilon \ll 1$ . Comme on fait l'hypothèse des petites déformations et des grands déplacements, on a

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \ll \epsilon \quad i, j, k = 1, 2$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_j} \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \sim \epsilon \quad i, j = 1, 2.$$

Etant donné le champ de déplacement qui nous occupe, les composantes dans le plan du tenseur des déformations sont les suivantes, où les termes négligeables ont été omis :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (1.9)$$

tandis que les composantes hors du plan sont négligeables. On peut écrire ces équations en notation indicielle de la manière suivante :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -z w_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + w_{,\alpha} w_{,\beta}).$$

D'autre part, l'équation constitutive liant les contraintes aux déformations reste la même que précédemment, soit

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu)\varepsilon_{\alpha\beta} + \nu \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}).$$

Avec ces relations, on peut obtenir une expression des moments et des efforts dans le plan en termes des déplacements de la surface moyenne :

$$M_{\alpha\beta} = -D \nu w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} - D (1-\nu) w_{,\alpha\beta}$$

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu \hat{\varepsilon}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}),$$

où

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + w_{,\alpha} w_{,\beta}) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^0 = (u, v, w).$$

A partir de ces expressions, les contraintes peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h} + M_{\alpha\beta} \frac{z E}{(1 - \nu^2)D}.$$

Pour dériver les équations régissant les plaques dans la théorie des petites déformations-grands déplacements, le principe de minimisation de l'énergie potentielle est utilisé, selon lequel la solution du problème est celle qui minimise l'énergie potentielle totale. Pour la simplicité des expressions, il est supposé que seule une pression  $q$  suivant l'axe  $z$  est appliquée à la plaque. Le raisonnement ci-dessous peut facilement être adapté au cas d'un chargement plus compliqué. L'énergie potentielle totale est dans ce cas :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dV - \int_A q w dA = U + V_e,$$

où  $U$  représente l'énergie des efforts internes et  $V_e$  l'énergie des efforts externes. En développant les expressions de  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  et  $\sigma_{\alpha\beta}$ , on obtient :

$$2U = \int_V \left( -z w_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + w_{,\alpha} w_{,\beta}) \right) \left( \frac{N_{\alpha\beta}}{h} + M_{\alpha\beta} \frac{z E}{(1 - \nu^2)D} \right) dV.$$

Effectuons une intégration sur l'épaisseur de la plaque. En tenant compte du fait que les termes multipliant  $z$  s'annulent après intégration, et en utilisant les définitions de  $D$  et  $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ , on obtient :

$$2U = \int_A -w_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} + \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} dA.$$

Analysons la variation de cette énergie lorsqu'on perturbe de manière infinitésimale les champs  $u, v$  et  $w$  par les champs  $\delta u, \delta v$  et  $\delta w$ , induisant des variations  $\delta M_{\alpha\beta}, \delta N_{\alpha\beta}$ , et  $\delta \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  :

$$\Rightarrow 2 \delta U = \int_A -\delta w_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - w_{\alpha\beta} \delta M_{\alpha\beta} + \delta \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} \delta N_{\alpha\beta} dA.$$

Les deux premiers termes et les deux derniers sont en fait identiques. En effet, il découle de la relation entre  $w_{\alpha\beta}$  et  $M_{\alpha\beta}$  que :

$$-\delta w_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = \delta w_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{\gamma\delta} \quad \text{où} \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta} = D \nu \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + D(1 - \nu) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}.$$

Comme  $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\gamma\delta\alpha\beta}$ , il découle en renommant les indices que :

$$-\delta w_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = \delta w_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta\alpha\beta} w_{\gamma\delta} = w_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \delta w_{\gamma\delta} = -w_{\alpha\beta} \delta M_{\alpha\beta}.$$

Le même raisonnement s'applique aux deux autres termes, et finalement la variation de l'énergie interne peut s'écrire :

$$\delta U = \int_A -\delta w_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} + \delta \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} dA.$$

Développons maintenant, en utilisant sa définition, le terme  $\delta\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  :

$$\delta\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \delta \left( \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + w_{,\alpha} w_{,\beta}) \right) = \frac{1}{2} (\delta u_{\alpha,\beta}^0 + \delta u_{\beta,\alpha}^0 + \delta w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\beta} \delta w_{,\alpha}).$$

Comme  $N$  est un tenseur symétrique, le produit  $\delta\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}$  s'écrit :

$$\delta\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha,\beta}^0 + N_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha} w_{,\beta}.$$

On peut donc écrire de la manière suivante la variation de l'énergie interne :

$$\delta U = \int_A -M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} w_{,\alpha} \delta w_{,\beta} + N_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha,\beta}^0 dA.$$

Comme les variations  $\delta w_{,\alpha\beta}$ ,  $\delta w_{,\alpha}$  et  $\delta u_{\alpha,\beta}$  ne sont pas indépendantes entre elles, l'expression doit encore être travaillée. Commençons par le troisième terme. L'intégration par partie donne :

$$\int_A N_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha,\beta}^0 dA = \int_{\partial A} N_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha}^0 n_{\beta} dl - \int_A N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_{\alpha}^0 dA.$$

De la même manière, on obtient pour le second terme :

$$\int_A N_{\alpha\beta} w_{,\alpha} \delta w_{,\beta} dA = \int_{\partial A} N_{\alpha\beta} w_{,\alpha} \delta w n_{\beta} dl - \int_A (N_{\alpha\beta} w_{,\alpha})_{,\beta} \delta w dA.$$

Le premier terme requiert une double intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_A -M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta} dA &= - \int_{\partial A} M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha} n_{\beta} dl + \int_A M_{\alpha\beta,\beta} \delta w_{,\alpha} dA \\ &= - \int_{\partial A} M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha} n_{\beta} dl + \int_{\partial A} M_{\alpha\beta,\beta} \delta w n_{\alpha} dl - \int_A M_{\alpha\beta,\alpha\beta} \delta w dA, \end{aligned}$$

où l'égalité des dérivées croisées a été utilisée pour la dernière égalité. Dans cette expression, le premier terme peut être explicité de la manière suivante :

$$M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha} n_{\beta} = M_{\alpha\beta} (\delta w_{,n} n_{\alpha} + \delta w_{,t} t_{\alpha}) n_{\beta} = M_{nn} \delta w_{,n} + M_{nt} \delta w_{,t},$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant du domaine,  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent tel que  $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = \hat{e}_z$ , et :

$$M_{nn} = M_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \quad M_{nt} = M_{\alpha\beta} n_{\alpha} t_{\beta}$$

$$w_{,n} = w_{,\alpha} n_{\alpha} \quad w_{,t} = w_{,\alpha} t_{\alpha}.$$

Comme les variations  $\delta w$  et  $\delta w_{,t}$  ne sont pas indépendantes sur la frontière, on procède encore une fois par intégration par parties. Supposons que la frontière soit composée

d'un certain nombre de courbes différentiables, notées  $l_i$ , alors :

$$\int_{\partial A} M_{nt} \delta w_{,t} dl = \sum_{l_i} \int_{l_i} M_{nt} \delta w_{,t} dl = \sum_{l_i} (M_{nt} \delta w n_{\partial l_i})_{\partial l_i} - \sum_{l_i} \int_{l_i} M_{nt,t} \delta w dl,$$

où, pour toute partie  $s$  de la frontière, et toute fonction  $f$ , on définit  $(f)_{\partial s} = f(s^+) + f(s^-)$ , avec  $s^+$  et  $s^-$  les deux extrémités de la frontière. On définit aussi, pour chaque extrémité de  $s$ ,  $n_{\partial s} = 1$  si  $\mathbf{t}$  sort de  $s$  à cette extrémité et  $n_{\partial s} = -1$  sinon. Finalement :

$$\begin{aligned} \int_A -M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta} dA &= - \int_{\partial A} M_{nn} \delta w_{,n} dl + \int_{\partial A} (M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha + M_{nt,t}) \delta w dl \\ &\quad - \int_A M_{\alpha\beta,\alpha\beta} \delta w dA - \sum_{l_i} (M_{nt} \delta w n_{\partial l_i})_{\partial l_i}. \end{aligned}$$

L'expression dans l'intégrale du second terme peut être réécrite en notant que

$$M_{\alpha\beta,\beta} n_\alpha + M_{nt,t} = M_{nn,n} + 2M_{nt,t}.$$

Cette quantité, qui est la somme de l'effort tranchant dans la direction perpendiculaire à la frontière et d'un terme provenant de la présence d'un moment  $M_{nt}$  variable sur la frontière, est appelée l'effort tranchant effectif, et notée  $T_n$ .

D'autre part, la variation de l'énergie induite par les efforts externes est :

$$\delta V_e = - \int_A q \delta w dA.$$

Comme toutes les variations en présence sont indépendantes, on peut utiliser le principe des travaux virtuels, qui énonce que la variation de l'énergie potentielle totale doit être nulle pour toute variation admissible du champ de déplacement. Considérons d'abord les termes de volume. Pour les efforts de types membranes, l'annulation des variations engendrées par les perturbations  $\delta u$  et  $\delta v$  impliquent :

$$N_{\alpha\beta,\beta} = 0. \tag{1.10}$$

Pour le terme de volume lié à  $\delta w$ , on a l'équation suivante :

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - (N_{\alpha\beta} w_{,\alpha})_{,\beta} - q = 0.$$

En tenant compte de 1.10, cette équation peut être simplifiée :

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} - q = 0. \tag{1.11}$$

Les équation 1.10 et 1.11 sont les équations de von Kármán pour la théorie des plaques en petites déformations - grands déplacements. Pour annuler les variations liées aux

termes de la frontière du domaine, il faut

$$\begin{cases} N_{nn} \delta u_n = 0 \\ N_{nt} \delta u_t = 0 \\ (M_{n,n} + 2M_{nt,t} + N_{nn}w_{,n} + N_{nt}w_{,t}) \delta w = 0 \\ M_{nn} \delta w_{,n} = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

On considère ici les variations admissibles des différents champs. Par exemple, si on impose la valeur de  $w$  sur une partie de la frontière, il est nécessaire que  $\delta w$  soit nul sur cette partie. La manière de lire les équations précédentes est alors la suivante : prenons par exemple la dernière condition ; si sur une partie de la frontière, l'angle de rotation de la plaque dans la direction perpendiculaire est imposé, alors  $\delta w_{,n} = 0$  à cette frontière pour toute variation admissible, et l'équation est satisfaite. Dans le cas contraire, aucune restriction n'est imposée à  $\delta w_{,n}$ , et par conséquent l'équation implique  $M_{nn} = 0$ . Le tableau suivant reprend les différentes conditions aux limites. Pour des conditions aux

Essentielle	Naturelle
$w = 0$	$M_{nn,n} + 2M_{nt,t} + N_{nn}w_{,n} + N_{nt}w_{,t} = 0$
$w_{,n} = 0$	$M_{nn} = 0$
$u_n = 0$	$N_{nn} = 0$
$u_t = 0$	$N_{nt} = 0$

TABLE 1.1 – Conditions aux limites pour le problème des plaques en grands déplacements, dans le cas où toutes les conditions aux limites sont homogènes.

limites plus compliquées, il suffit d'ajouter dans le membre de droite des conditions les valeurs imposées. L'approche énergétique a l'avantage de donner directement les quantités qu'il est possible d'imposer sur les frontières. Pour une frontière libre, par exemple, la méthode donne que la quantité qu'on peut fixer est la suivante

$$M_{nn,n} + 2M_{nt,t} + N_{nn}w_{,n} + N_{nt}w_{,t}.$$

Les deux premiers termes forment l'effort tranchant effectif, tandis que les deux suivants sont liés aux efforts dans le plan de la surface moyenne.

Pour les coins, la condition est

$$\sum_{l_i} (M_{nt} \delta w n_{\partial l_i})_{\partial l_i} = 0.$$

Chaque coin a deux contributions dans cette somme. Si pour un coin, reliant deux côtés de normales  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  et de tangentes  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  au coin, le déplacement  $w$  n'est pas imposé, il faut alors que le moment  $M_{nt}$  soit identique des deux côtés :

$$M_{n_1 t_1} = M_{n_2 t_2}.$$

### 1.3.3 Théorie linéaire du flambement des plaques

Dans cette section, la théorie linéaire du flambement des plaques minces est développée, en suivant le raisonnement présenté dans [12]. On considère dans la théorie du flambement classique une plaque n'étant soumise qu'à des efforts dans le plan. L'équation aux dérivées partielles régissant la déflexion transversale de la plaque est alors :

$$D \Delta \Delta w - N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} = 0.$$

Il est clair que la fonction  $w = 0$  est solution de cette équation, pour autant que les conditions aux limites soient homogènes. Néanmoins, quand la plaque est soumise à des efforts de compression dépassant une valeur critique, un phénomène d'instabilité apparaît, appelé le flambement, ou flambage, et conduisant souvent à l'endommagement ou la rupture de la plaque. La présente théorie vise à trouver cette valeur critique. De manière générale, le champ  $N_{\alpha\beta}$  peut s'obtenir par résolution de :

$$N_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad \text{avec} \quad N_{\alpha\beta} = \frac{E h}{1 - \nu^2} (\nu \hat{\varepsilon}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1 - \nu) \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta})$$

$$\text{et} \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + w_{,\alpha} w_{,\beta}),$$

et par les conditions aux limites. Tant que les efforts de compression sont assez petits, la plaque ne fléchit pas, et le terme non linéaire de  $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  est nul. Dans la suite, on considère la phase d'initiation du flambement, durant laquelle la déflexion  $w$  est suffisamment petite que pour négliger le terme  $w_{,\alpha} w_{,\beta}$ . En d'autres termes, l'expression de  $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  est linéarisée autour de  $w = 0$ . Dans ce cas, les efforts dans le plan de la surface moyenne ne dépendent pas du problème de flexion.

Une technique classique de résolution de ces équations consiste à utiliser la fonction d'Airy. Cette méthode est applicable lorsque les efforts  $N_n$  et  $N_t$  sont spécifiés sur toutes les frontières de la plaque, contrairement aux déplacements  $u_n$  et  $u_t$ . Pour une description approfondie des méthodes de résolution des problèmes de contraintes planes, le lecteur peut se référer à [10].

Supposons que  $N_{\alpha\beta}^0$  soit solution du problème. On considère maintenant que le chargement du problème réel est égal à un facteur  $\lambda$  près au chargement précédent. Par linéarité, les efforts dans le plan sont alors donnés par  $N_{\alpha\beta} = \lambda N_{\alpha\beta}^0$ . Selon la valeur de  $\lambda$ , la structure va flamber ou non. La valeur critique de  $\lambda$  est la plus petite valeur pour laquelle le problème de flexion admet une solution non triviale :

$$D \Delta \Delta w - \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} = 0.$$

Cette équation définit un problème aux valeurs propres. Notons  $\lambda^*$  la plus petite valeur propre de ce problème et  $\hat{w}$  la fonction propre associée. Supposons maintenant que la plaque soit chargée par  $q = \alpha D \Delta \Delta \hat{w}$ . L'équation des plaques en grands déplacements

et sa solution sont alors données par :

$$D \Delta \Delta w - \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} = \alpha D \Delta \Delta \hat{w} \quad \rightarrow \quad w = \alpha \left( \frac{\lambda^*}{\lambda^* - \lambda} \right) \hat{w}$$

Aussi petit que soit  $\alpha$ , on constate que la déflexion de la plaque tend vers l'infini lorsque  $\lambda \rightarrow \lambda^*$ . On a donc identifié un chargement pour lequel l'équation des plaques en grands déplacements prévoit un accroissement sans limite de la déflexion. En réalité, cela ne se passe pas toujours comme ça, suite à la non-linéarité des équations réelles.

Afin d'illustrer cette méthode, considérons une plaque carrée simplement supportée, de côté  $L$ , et soumise à une force de compression  $F$  dans la direction  $x$ . On a dans ce cas

$$[N_{\alpha\beta}^0] = \frac{F}{L} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites du problème de flexion sont les suivantes :

$$\begin{aligned} w = w_{,xx} = 0 & \quad \text{pour} \quad x = 0, L \\ w = w_{,yy} = 0 & \quad \text{pour} \quad y = 0, L \end{aligned}$$

Le problème aux valeurs propres admet des solutions de la forme suivante :

$$f = c_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad m, n \in \mathbb{N}_0$$

Cette fonction satisfait clairement toutes les conditions aux limites du problème. En remplaçant son expression dans le problème aux valeurs propres, on trouve, après calcul et simplification, la relation suivante :

$$D c_{mn} \left[ \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 - \frac{F}{L} c_{mn} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 = 0$$

d'où on déduit :

$$F = D L \frac{\left[ \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}$$

Cette expression est minimale quand  $m = n = 1$ . Dans ce cas, on obtient la charge critique de flambement  $F = 4\pi^2 D/L$ . Dans le chapitre 3, cet exemple sera traité numériquement par la méthode de Galerkin discontinue.

Ceci clôture notre discussion des équations des poutres et des plaques. Dans les chapitres suivant, la méthode de Galerkin discontinue est appliquée à la résolution de ces équations.

## Chapitre 2

# Etude de la méthode des éléments finis discontinus pour les poutres

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis discontinus est appliquée à la résolution de l'équation différentielle régissant la déflexion transversale des poutres d'Euler-Bernoulli. Dans un premier temps, une formulation consistante du problème est établie par la méthode des éléments finis discontinus. La stabilité et la convergence de la méthode sont ensuite étudiées, ainsi que ses propriétés de dispersion et de dissipation. Finalement, la méthode est étendue à l'équation des poutres en grandes déformations.

### 2.1 Formulation variationnelle discontinue de Galerkin

Dans cette section, une formulation variationnelle du problème des poutres d'Euler-Bernoulli est obtenue, en utilisant la méthode de Galerkin discontinue. La méthode est basée sur les travaux de G. Becker et L. Noels dans [5]. Introduisons un maillage de  $N$  éléments sur le domaine  $[0, 1]$ , et numérotons les éléments de 1 à  $N$ . Définissons ensuite un espace de fonctions de test  $\mathcal{V}$ , qui sera spécifié plus tard. En multipliant l'équation de la formulation forte du problème statique par une fonction de test quelconque  $v \in \mathcal{V}$ , on a :

$$(EI w'')'' v = q v.$$

Notons  $e_i = (x_{i-1}, x_i)$  le  $i$ -ème élément du domaine, avec  $i \in 1 \dots N$ . Par intégration de l'équation précédente sur  $e_i$ , on obtient :

$$\int_{e_i} (EI w'')'' v dx = \int_{e_i} q v dx.$$

En supposant que la fonction de test  $v$  soit deux fois dérivable sur l'intérieur des éléments, la formule de l'intégration par partie peut être utilisée deux fois, pour donner :

$$\int_{e_i} (\text{EI } w'') v'' dx - [(\text{EI } w'') v']_{e_i} + [(\text{EI } w'')' v]_{e_i} = \int_{e_i} q v dx,$$

où on a défini  $[f(x)]_{e_i} = f(x_i^-) - f(x_{i-1}^+)$ , avec  $x_i^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} (x_i \pm \epsilon)$ . Cette équation a une interprétation physique simple en terme de travaux virtuels. Le terme de droite représente le travail fait par le chargement  $q(x)$  lors d'une variation  $v$  de la déflexion transversale de la fibre moyenne dans l'élément. L'intégrale du membre de gauche, quant à elle, est égale au travail fait par les efforts internes dans la déformation induite par la même variation  $v$  de  $w$  dans l'élément considéré. Finalement, le terme  $[(\text{EI } w'')' v]_{e_i}$  peut s'écrire  $-[Q v]_{e_i}$ , et correspond à l'opposé du travail fait par les efforts tranchants aux deux bords de l'éléments dans la variation  $v$ , tandis que le terme  $-[(\text{EI } w'') v']_{e_i} = [M v']_{e_i}$  est l'opposé du travail fait par les moments de flexion aux bords de l'élément. Cette équation, qui exprime l'équilibre local de l'élément, aurait donc pu être obtenue directement à partir du principe des travaux virtuels. En sommant ces équations sur tous les éléments, on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \left( \int_{e_i} \text{EI } w'' v'' dx - [\text{EI } w'' v']_{e_i} + [(\text{EI } w'')' v]_{e_i} \right) = \sum_{i=1}^N \int_{e_i} q v dx. \quad (2.1)$$

Cette relation est satisfaite par la solution exacte, pour toute fonction de test  $v \in \mathcal{V}$ . La propriété d'additivité des intégrales implique que le second membre satisfait :

$$\sum_{i=1}^N \int_{e_i} q v dx = \int_0^L q v dx.$$

Notons  $s_i$  l'interface entre  $e_i$  et  $e_{i+1}$ , se trouvant en  $x = x_i$ , et introduisons les notations suivantes, communes à la méthode des éléments finis discontinus :

$$[f(x)]_{s_i} = f(x_i^+) - f(x_i^-) \quad \langle f(x) \rangle_{s_i} = \frac{1}{2} (f(x_i^+) + f(x_i^-)),$$

pour  $i = 1 \dots N - 1$ . Avec ces notations, l'identité suivante est vérifiée :

$$[ab] = [a] \langle b \rangle + [b] \langle a \rangle.$$

L'équation 2.1 peut alors être réécrite de la manière suivante, en notant  $\mathcal{K}$  l'ensemble des éléments, et  $\mathcal{E}_i$  l'ensemble des interfaces intérieures du domaine :

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e (\text{EI } w'') v'' dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i} ([(\text{EI } w'') v']_s - [(\text{EI } w'')' v]_s) \\ & + (\text{EI } w'' v' - (\text{EI } w'')' v)_{x_0^+} - (\text{EI } w'' v' - (\text{EI } w'')' v)_{x_N^-} = \int_0^L q v dx. \end{aligned}$$

Si  $w$  est la solution exacte du problème, alors les termes  $EI w''$  et  $(EI w'')'$ , égaux au signe près au moment fléchissant et à l'effort tranchant, sont continus sur tout le domaine, à condition qu'aucune force ponctuelle ne soit appliquée, ce qui est satisfait si  $q(x) \in L^2(0, 1)$ . Par conséquent, on a, pour la solution exacte :

$$\begin{aligned} [(EI w'')v']_s &= \langle EI w'' \rangle_s [v']_s, \\ [(EI w'')'v]_s &= \langle (EI w'')' \rangle_s [v]_s. \end{aligned}$$

D'autre part, la solution exacte  $w$  et sa dérivée  $w'$  sont des fonctions continues. On peut donc ajouter aux termes précédents leur symétrique ainsi qu'un terme de stabilisation tout en conservant la consistance de la formulation :

$$\begin{aligned} \langle EI w'' \rangle_s [v']_s &\rightarrow \langle EI w'' \rangle_s [v']_s + \langle EI v'' \rangle_s [w']_s + [w']_s x_{1,s} [v']_s, \\ \langle (EI w'')' \rangle_{s_i} [v]_s &\rightarrow \langle (EI w'')' \rangle_s [v]_s + \langle (EI v'')' \rangle_s [w]_s - [w]_s x_{2,s} [v]_s, \end{aligned}$$

où les paramètres dimensionnels  $x_1$  et  $x_2$  seront déterminés plus tard. L'ajout des termes supplémentaires est important : d'une part, ajouter ces termes permet de prouver la convergence optimale de la méthode; d'autre part, cela permet d'écrire la méthode numérique à l'aide d'une matrice symétrique définie positive, propriété facilitant grandement la résolution des systèmes linéaires. En outre, les termes de stabilisation permettent aussi d'obtenir une méthode stable pour les simulations dynamiques. Nous reviendrons sur ces points dans la suite de ce chapitre.

Le traitement des termes liés aux deux extrémités du domaine dépend du type des conditions imposées. Prenons par exemple le terme  $(EI w''v' - (EI w'')'v)_{x_0^+}$ . Si l'extrémité  $x = 0$  de la poutre est libre, ce terme est identiquement nul lorsque  $w$  est solution exacte du problème. On le remplace donc par 0 dans la formulation variationnelle. De même, pour un appui simple, le moment est nul, et donc  $EI w'' = 0$ . De manière générale, appelons  $\mathcal{E}_b$  l'ensemble contenant les deux frontières du domaine,  $\mathcal{E}_f$  l'ensemble des frontières libres,  $\mathcal{E}_s$  l'ensemble des frontières simplement supportées, et  $\mathcal{E}_c$  l'ensemble des frontières encastées. Introduisons aussi, pour chacune des deux limites de la poutre, le nombre  $n$ , égal à -1 lorsque  $x = 1$  et 1 lorsque  $x = 0$ . C'est en quelque sorte la normale entrante. Cette notation permet de simplifier l'écriture des termes de bord :

$$\begin{aligned} (EI w''v' - (EI w'')'v)_{x_0^+} - (EI w''v' - (EI w'')'v)_{x_N^-} = \\ \sum_{s \in \mathcal{E}_b} (EI w''v' - (EI w'')'v) \cdot n. \end{aligned}$$

En faisant usage des conditions aux frontières, on obtient pour la solution exacte :

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{E}_b} (EI w''v' - (EI w'')'v) \cdot n = \sum_{s \in \mathcal{E}_s} -(EI w'')'v \cdot n \\ + \sum_{s \in \mathcal{E}_c} (EI w''v' - (EI w'')'v) \cdot n. \end{aligned}$$

On procède ensuite de la même manière que pour les termes de l'intérieur du domaine, c'est à dire qu'on ajoute des termes consistants afin de rendre la formulation symétrique et stable :

$$\begin{aligned} \text{EI } w'' v' \cdot n &\rightarrow \text{EI } w'' v' \cdot n + \text{EI } v'' w' \cdot n + x_1 v' w', \\ (\text{EI } w'')' v \cdot n &\rightarrow (\text{EI } w'')' v \cdot n + (\text{EI } v'')' w \cdot n + x_2 v w. \end{aligned}$$

Généralisons maintenant les notations  $[\cdot]$  et  $\langle \cdot \rangle$  aux interfaces situées à l'extrémité de la poutre :

$$[f]_{s \in \mathcal{E}_b} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} f(x_s + n\epsilon) \cdot n \quad \langle f \rangle_{s \in \mathcal{E}_b} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} f(x_s + n\epsilon).$$

Grâce à ces notations, on peut écrire que la solution exacte  $w$  du problème satisfait la relation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e (\text{EI } w'') v'' dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \left( \langle \text{EI } w'' \rangle_s [v']_s + \langle \text{EI } v'' \rangle_s [w']_s + [w']_s x_{1,s} [v']_s \right) + \\ \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_c} \left( -\langle (\text{EI } w'')' \rangle_s [v]_s - \langle (\text{EI } v'')' \rangle_s [w]_s + [w]_s x_{2,s} [v]_s \right) = \int_0^L q(x) v(x) dx \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Le membre de gauche est une forme bilinéaire que nous notons  $a(u, v)$ , tandis que le membre de droite est une forme linéaire  $b(v)$ . Cela nous permet d'établir une formulation variationnelle. Cette expression permet d'établir une formulation variationnelle du problème de la poutre de Bernoulli. Il s'agit de trouver  $w \in \mathcal{V}$  tel que

$$a(w, v) = b(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Cette formulation est appelée formulation de Galerkin discontinue. Pour la rendre complète, il nous reste à spécifier l'espace  $\mathcal{V}$ . Cet espace doit être tel que tous les termes de la formulation variationnelle soient bien définis. C'est le cas quand l'espace  $\mathcal{V}$  est choisi comme l'espace  $\mathcal{V} = H^4(\mathcal{K})$  (appelé en anglais "Broken Sobolev space"), défini par :

$$H^4(\mathcal{K}) = \{v \in L^2(0, L) : \forall K \in \mathcal{K}, v|_K \in H^4(K)\}.$$

En se basant sur les travaux de B. Riviere dans [13], il est en fait possible de considérer un espace plus large, en utilisant les espaces de Sobolev à indices fractionnaires, mais cela sort de la portée de ce travail. De plus, dans tous les cas que nous allons considérer, la solution se trouvera dans  $H^4(\mathcal{K})$ .

## Consistance de la formulation

Nous venons de montrer que la solution de la formulation forte du problème satisfait la formulation variationnelle. Montrons que la réciproque est vraie aussi, en s'inspirant

de la preuve faite dans [3] pour la méthode C/DG. Supposons donc que  $w$  soit solution du problème variationnel. Alors, pour toute fonction  $v$  de l'espace  $\mathcal{V}$ ,  $a(w, v) = b(v)$ . En intégrant par parties le premier terme de  $a(w, v)$ , et en utilisant la relation  $[ab] = \langle a \rangle [b] + \langle b \rangle [a]$  pour les interfaces intérieures, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e \text{EI } w'' v'' dx &= \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e (\text{EI } w'')'' v dx - \sum_{s \in \mathcal{E}} [\text{EI } w'' v']_s + \sum_{s \in \mathcal{E}} [(\text{EI } w'')' v]_s \\ &= \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e (\text{EI } w'')'' v dx - \sum_{s \in \mathcal{E}_i} ([\text{EI } w'']_s \langle v' \rangle_s + \langle \text{EI } w'' \rangle_s [v']_s) \\ &\quad + \sum_{s \in \mathcal{E}_i} ([(\text{EI } w'')']_s \langle v \rangle_s + \langle (\text{EI } w'')' \rangle_s [v]_s) \\ &\quad + \sum_{s \in \mathcal{E}_b} (-(\text{EI } w'' v')_s \cdot n + ((\text{EI } w'')' v)_s \cdot n). \end{aligned}$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e (\text{EI } w'')'' v dx - \sum_{s \in \mathcal{E}_i} [\text{EI } w'']_s \langle v' \rangle_s + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \left( \langle \text{EI } v'' \rangle_s [w']_s + [w']_s x_{1,s} [v']_s \right) \\ &\quad + \sum_{s \in \mathcal{E}_i} [(\text{EI } w'')']_s \langle v \rangle_s + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_c} \left( - \langle (\text{EI } v'')' \rangle_s [w]_s + [w]_s x_{2,s} [v]_s \right) \\ &\quad + \sum_{s \in \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_f} (\text{EI } w'')_s v'_s \cdot n - \sum_{s \in \mathcal{E}_f} ((\text{EI } w'')')_s v_s \cdot n = \int_0^L q(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Comme la relation  $a(w, v) = b(v)$  est vérifiée pour toute fonction  $v \in \mathcal{V}$ , on en déduit que la solution du problème variationnel satisfait l'équation  $(\text{EI } w'')'' = q$  à l'intérieur de tous les éléments. On en déduit aussi que la solution  $w$  et sa dérivée sont continues sur les interfaces intérieures, ainsi que  $\text{EI } w''$  et  $(\text{EI } w'')$ '. L'effort tranchant et le moment de la solution sont donc bien continus. En outre, le problème variationnel implique que  $\text{EI } w'' = 0 \forall s \in \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_f$ , et  $(\text{EI } w'')' = 0 \forall s \in \mathcal{E}_f$ , et les conditions aux frontières naturelles du problème sont satisfaites. Finalement, on a aussi  $[w']_s = 0 \forall s \in \mathcal{E}_c$  et  $[w]_s = 0 \forall s \in \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_c$ , et les conditions aux frontières essentielles sont aussi satisfaites.

## Cas dynamique

Le remplacement de  $q(x)$  par  $q(x) - \mu \ddot{w}(x)$  dans le développement précédent nous permet d'obtenir la formulation variationnelle pour ce cas, qui consiste à trouver  $w \in \mathcal{V}$  tel que

$$\int_0^L \mu \ddot{w} v dx + a(w, v) = b(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

## 2.2 Méthode numérique

Dans le cas statique, la méthode de Galerkin discontinue consiste à trouver  $w \in D_p(\mathcal{K})$  tel que

$$a(w, v) = b(v) \quad \forall v \in D_p(\mathcal{K}).$$

Dans cette formulation,  $D_p(\mathcal{K})$  est l'espace des fonctions polynomiales par morceaux d'un certain degré  $p$  sur le maillage, soit

$$D_p(\mathcal{K}) = \bigoplus_{K \in \mathcal{K}} P_p(K).$$

où  $P_p(K)$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  sur l'élément  $K$ . L'espace d'approximation  $D_p(\mathcal{K})$  contient des fonctions discontinues, ce qui justifie le nom donné à la méthode. Comme on le voit, l'imposition des conditions aux limites est faite au sens faible, et ne requiert presque aucun travail, ce qui est un des avantages de la méthode de Galerkin discontinue. Notons aussi que l'espace de travail peut être plus général. Par exemple, le degré des polynômes peut être choisi indépendamment sur chaque élément.

A partir de la formulation précédente, on peut obtenir un système linéaire : étant donné une base  $\{\psi_i(x)\}$  de  $D_p(\mathcal{K})$ , la solution du problème, que l'on décompose dans cette base comme la somme  $w = \sum x_i \psi_i$ , est obtenue en résolvant le système :

$$Kx = b \quad \text{où} \quad K_{ij} = a(\psi_i, \psi_j) \quad \text{et} \quad b_j = b(\psi_j).$$

La matrice  $K$  est appelée matrice de raideur. En pratique, on prend comme éléments de la base des polynômes qui sont non nuls dans un seul des éléments. Si on numérote les fonctions de base élément par élément dans l'ordre, la matrice résultante sera bloc tri-diagonale. Notons que, grâce aux termes de symétrie ajoutés dans la formulation variationnelle, la matrice de raideur est symétrique.

Dans le cas dynamique, on a le système d'équations différentielles suivant :

$$M\ddot{x} + Kx = b \quad \text{où} \quad M_{ij} = \mu \int_0^L \psi_i \psi_j dx.$$

L'intégration temporelle de ce système requiert l'inversion de la matrice  $M$ , où du moins la résolution d'un système linéaire. Par rapport aux méthodes d'éléments finis classiques, cette étape est beaucoup plus simple, car la matrice  $M$  est bloc-diagonale. Mieux encore, si on choisit comme fonctions de base sur l'élément parent des polynômes orthogonaux, la matrice est réellement diagonale.

Pour que la solution obtenue par l'intégration de ce système reste finie, il faut et est suffisant que la matrice de raideur soit définie positive. Pour montrer cela, considérons

le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$Kv = \lambda Mv.$$

Comme  $M$  est symétrique et définie positive, ce problème admet une valeur propre négative ou nulle si et seulement si  $K$  a une valeur propre négative. Or, à chaque vecteur propre  $v$  solution du problème, et valeur propre associée  $\lambda$ , correspondent 2 solutions homogènes de l'équation  $M\ddot{x} + Kx = b$ , données par  $x(t) = v e^{\pm\sqrt{-\lambda}t}$  dans le cas  $\lambda \neq 0$ , et  $x(t) = vt$  ou  $x(t) = v$  dans le cas  $\lambda = 0$ . Le système est donc stable si et seulement si  $K$  est définie positive.

## 2.3 Analyse de la méthode

Dans cette section, les propriétés importantes de la méthode sont analysées. On suppose dans la suite que la coordonnée  $x$  est normalisée à la taille de la poutre, ce qui nous permet de travailler sur le domaine  $[0, 1]$ .

### 2.3.1 Equilibre local

Une propriété importante de la méthode des éléments finis discontinus, mise en évidence par [4] dans le cas des plaques, est la propriété d'équilibre local. Pour un élément  $e$ , elle s'obtient en prenant dans l'expression variationnelle une fonction de  $P_1(e)$ , c'est à dire polynomiale de degré inférieur ou égal à 1, et prenant des valeurs non-nulles uniquement sur  $e$ . On a alors :

$$-[v' (\langle EI w'' \rangle - x_1[w'])]_e + [v (\langle (EI w'')' \rangle + x_2[w])]_e = \int_e q(x) dx.$$

En introduisant, pour chaque interface, l'effort tranchant discret, défini par  $\tilde{Q} = -\langle (EI w'')' \rangle - x_2[w]$ , et le moment de flexion discret, donné par  $\tilde{M} = -\langle EI w'' \rangle + x_1[w']$ , la relation précédente peut s'exprimer :

$$[\tilde{M}v']_e - [\tilde{T}v]_e = \int_e q(x)v dx.$$

Cette équation exprime l'équilibre des éléments par rapport à des rotations ou des translations verticales. En particulier, quand on choisit  $v = 1$  sur l'élément, on a :

$$-[\tilde{T}]_e = \int_e q(x) dx,$$

qui exprime l'équilibre des forces verticales sur l'élément.

### 2.3.2 Coercivité de $a(\cdot, \cdot)$

On dit d'une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  qu'elle est coercive pour une norme  $\|\cdot\|$  et un espace  $V$  lorsque

$$a(v, v) > c\|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

Analysons les conditions sous lesquelles la forme bilinéaire de la méthode de Galerkin discontinue est coercive, pour une constante  $c$  indépendante de la taille des éléments, pour la norme suivante, appelée norme énergétique :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 = & \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e EI (u'')^2 dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i U \mathcal{E}_c} (EI h \langle u'' \rangle_s^2 + EI h^{-1} [u']_s^2) \\ & + \sum_{s \in \mathcal{E}_i U \mathcal{E}_c U \mathcal{E}_s} (EI h^3 \langle u''' \rangle_s^2 + EI h^{-3} [u]_s^2), \end{aligned}$$

et lorsque  $V$  est l'espace des polynômes par morceaux de degré inférieur ou égal  $p$  sur le maillage, soit  $V = D_p(\mathcal{K})$ . Dans l'expression précédente, on définit  $h$  comme la taille moyenne des éléments. C'est bien une norme. En effet, si  $\|u\| = 0$ , alors l'annulation du premier terme impose  $u'' = 0$  sur chaque élément, et  $u$  est donc linéaire par morceaux. L'annulation des deux termes de pénalité des sauts impose d'autre part que  $u$  est continue et dérivable aux interfaces intérieures,  $u = 0$  sur  $\mathcal{E}_c U \mathcal{E}_s$  et  $u' = 0$  sur  $\mathcal{E}_c$ . On en déduit que  $u = 0$ , puisque soit une frontière est encastree, soit les deux frontières sont simplement supportées.

Pour montrer la coercivité, plusieurs inégalités vont nous servir, parmi lesquelles l'inégalité de Young et des inégalités de trace inverses. Ces inégalités sont rappelées et démontrées dans les paragraphes suivants.

#### Inégalité de Young

Cette inégalité est la suivante :

$$|2ab| \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2 \quad \forall \epsilon > 0.$$

L'inégalité est trivialement satisfaite lorsque  $ab = 0$ . Dans les autres cas, un rapide calcul de dérivée seconde montre que le membre de droite est une fonction convexe en  $\epsilon$ . Son minimum est par conséquent atteint lorsque sa dérivée par rapport à  $\epsilon$  s'annule, c'est à dire lorsque :

$$-\frac{a^2}{\epsilon^2} + b^2 = 0 \rightarrow \epsilon = |a/b|.$$

En remplaçant  $\epsilon$  par cette valeur, on obtient que le minimum du membre de droite est  $|2ab|$ , ce qui prouve l'inégalité.

### Inégalités de trace inverses

Commençons par introduire une base de polynômes orthogonaux sur l'intervalle  $[0, L]$ , dont les éléments définis par

$$\phi_i(x) = \frac{L_i\left(\frac{x-L/2}{L/2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2i+1}}},$$

où  $L_i$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $i$  sur  $[-1, 1]$ . On vérifie, en utilisant la propriété d'orthogonalité de ces polynômes, que

$$(\phi_i, \phi_j)_{L^2(0,L)} = \int_0^L \phi_i \phi_j dx = \frac{L}{2}(2i+1) \int_{-1}^1 L_i L_j dx = L \delta_{ij}.$$

Supposons maintenant que  $P_k$  soit un polynôme de degré  $k$  défini sur l'intervalle  $[0, L]$ , et s'exprimant dans la base de polynômes orthogonaux comme  $P_k(x) = c^T \phi(x)$ , où l'on définit

$$c = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_k \end{pmatrix}^T \quad \text{et} \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_0 & \phi_1(x) & \cdots & \phi_k(x) \end{pmatrix}^T.$$

La relation d'orthogonalité donne

$$\|P_k\|_{L^2(0,L)}^2 = L c^T c.$$

D'autre part, on a en  $x = 0$  :

$$P_k(0)^2 = c^T (\phi(0)\phi(0)^T) c \quad \text{avec} \quad \phi(0) = \begin{pmatrix} \phi_0 & \phi_1(0) & \cdots & \phi_k(0) \end{pmatrix}^T.$$

Comme la matrice  $(\phi(0)\phi(0)^T)$  est de rang 1, elle n'a qu'une valeur propre non nulle, égale à  $(\phi(0)\phi(0)^T)$ . En effet  $(\phi(0)\phi(0)^T)\phi(0) = (\phi(0)^T\phi(0))\phi_0$ . En développant le produit et en utilisant le fait que les polynômes de Legendre sont tels que  $L_i(1) = (-1)^i$ , on peut obtenir cette valeur propre en fonction du degré maximal des polynômes considérés :

$$\phi(0)^T \phi(0) = \sum_{i=0}^k (\sqrt{2i+1} L_i(-1))^2 = \sum_{i=0}^k 2i+1 = (k+1)^2.$$

Par conséquent :

$$P_k(0)^2 \leq (k+1)^2 c^T c = \frac{(k+1)^2}{L} \|P_k(x)\|_{L^2(0,L)}^2,$$

et finalement :

$$|P_k(0)| \leq \frac{k+1}{\sqrt{L}} \|P_k\|_{L^2(0,L)}.$$

En raisonnant de manière analogue, on peut obtenir une inégalité similaire concernant  $|P'_k(0)|$ . En utilisant la même base de polynômes, on a

$$P'_k(0)^2 = c^T (\phi'(0)\phi'(0)^T) c.$$

La matrice  $(\phi'(0)\phi'(0)^T)$  est aussi de rang 1, et sa valeur propre est :

$$\begin{aligned}\lambda &= \phi'(0)^T \phi'(0) = \frac{4}{L^2} \sum_{i=0}^k (\sqrt{2i+1} L'_i(-1))^2 = \frac{4}{L^2} \sum_{i=0}^k \left( \sqrt{2i+1} (-1)^{i+1} \frac{i(i+1)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4}{L^2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{4} (2i+1) i^2 (i+1)^2 = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^k (2i^5 + 5i^4 + 4i^3 + i^2),\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $L'_i(-1) = (-1)^{i+1} i(i+1)/2$ . En utilisant la formule de Faulhaber, présentée dans [14], on obtient finalement :

$$\lambda = \frac{k^2(k+1)^2(k+2)^2}{3L^2}.$$

On conclut donc par :

$$|P'_k(0)| \leq \frac{k(k+1)(k+2)}{\sqrt{3}L^{3/2}} \|P_k\|_{L^2(0,L)}.$$

Tous les éléments sont maintenant à notre disposition pour prouver la coercivité de la forme bilinéaire impliquée dans la méthode de Galerkin discontinue.

### Preuve de la coercivité

Avant de passer à la preuve de la coercivité, on introduit une nouvelle norme :

$$\|u\|_*^2 = \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e \text{EI} (u'')^2 dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i U \mathcal{E}_c} \text{EI} h^{-1} [u']_s^2 + \sum_{s \in \mathcal{E}_i U \mathcal{E}_c U E_s} \text{EI} h^{-3} [u]_s^2.$$

En utilisant les inégalités de trace inverses, on peut prouver que  $\|v\|^2 \leq a \|v\|_*^2$ , pour tout élément  $v$  de  $D_p(\mathcal{K})$ , et avec une constante  $a$  indépendante de  $h$ . Ce résultat n'est pas montré ici étant donné que la preuve ressemble à celle faite ci-dessous. On en déduit qu'il est équivalent de démontrer la coercivité par rapport à  $\|\cdot\|$  ou  $\|\cdot\|_*$ . En effet, si

$$a(u, u) > \gamma \|u\|_*^2 \quad \text{alors} \quad a(u, u) > \frac{\gamma}{a} \|u\|^2. \quad (2.2)$$

Pour la simplicité, c'est la coercivité par rapport à  $\|\cdot\|_*$  que nous allons montrer. On pourrait se demander pourquoi ne pas choisir cette norme directement. Comme on le verra plus tard, les termes additionnels de la norme énergétique  $\|\cdot\|$  sont nécessaires pour montrer la continuité de la forme bilinéaire.

Revenons à la preuve de la coercivité de la forme bilinéaire. Cette preuve est basée sur celle formulée dans [15] pour l'équation de Laplace. En utilisant la définition de la forme bilinéaire, on obtient :

$$a(u, u) = \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_K \text{EI} (u'')^2 dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i U \mathcal{E}_c} \left( 2 \langle \text{EI} u'' \rangle_s [u']_s + [u']_s x_{1,s} [u']_s \right) + \dots$$

$$\sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_c} \left( -2 \langle (\text{EI } u'')' \rangle_s [u]_s + [u]_s x_{2,s} [u]_s \right).$$

Pour simplifier, on suppose que le produit EI est constant et on introduit les nouveaux paramètres  $y_1$  et  $y_2$ , tels que  $x_1 = \text{EI } y_1$  et  $x_2 = \text{EI } y_2$ . En utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} a(u, u)/\text{EI} &= \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_K (u'')^2 dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \left( 2 \langle u'' \rangle_s [u']_s + [u']_s y_{1,s} [u']_s \right) + \dots \\ &\quad \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_c} \left( -2 \langle u''' \rangle_s [u]_s + [u]_s y_{2,s} [u]_s \right) \\ &\geq \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_K (u'')^2 dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \left( -\frac{\langle u'' \rangle_s^2}{\epsilon_{1,s}} + (y_{1,s} - \epsilon_{1,s}) [u']_s^2 \right) + \dots \\ &\quad \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_c} \left( -\frac{\langle u''' \rangle_s^2}{\epsilon_{2,s}} + (y_{2,s} - \epsilon_{2,s}) [u]_s^2 \right) \end{aligned}$$

Pour les interfaces intérieures, on a :

$$-\langle u'' \rangle_{s_i}^2 = -\frac{1}{4} (u''(x_i^-)^2 + u''(x_i^+)^2 + 2u''(x_i^-)u''(x_i^+)) \geq -\frac{1}{2} (u''(x_i^-)^2 + u''(x_i^+)^2),$$

où la dernière inégalité provient du fait que  $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$ . Notons maintenant  $c_i = (k+1)/\sqrt{h_i}$ , où  $h_i$  est la taille de l'élément  $i$ , et  $k$  est le degré maximal de la dérivée seconde de  $u$ , soit  $k = p-2$  si  $p$  est le degré des polynômes utilisés. L'inégalité de trace inverse implique, si on suppose que l'interface  $s_i$  est située entre les éléments  $e_i$  et  $e_{i+1}$  :

$$-\langle u'' \rangle_{s_i}^2 \geq -\frac{1}{2} \left( c_{i+1}^2 \int_{e_{i+1}} (u'')^2 dx + c_i^2 \int_{e_i} (u'')^2 dx \right).$$

Pour les frontières, on a, en utilisant l'inégalité de trace inverse

$$-\langle u'' \rangle_{s_0}^2 \geq -c_1^2 \int_{e_1} (u'')^2 dx \quad -\langle u'' \rangle_{s_N}^2 \geq -c_N^2 \int_{e_N} (u'')^2 dx.$$

De même, en introduisant  $d_i = k(k+1)(k+2)/\sqrt{3h_i^3}$ , on obtient pour les interfaces intérieures :

$$-\langle u''' \rangle_{s_i}^2 \geq -\frac{1}{2} \left( d_{i+1}^2 \int_{e_{i+1}} (u''')^2 dx + d_i^2 \int_{e_i} (u''')^2 dx \right),$$

et pour les frontières :

$$-\langle u''' \rangle_{s_0}^2 \geq -d_1^2 \int_{e_1} (u''')^2 dx \quad -\langle u''' \rangle_{s_N}^2 \geq -d_N^2 \int_{e_N} (u''')^2 dx.$$

Supposons pour la simplicité que la taille des éléments est constante, de sorte que  $c_i$  et  $d_i$  sont eux aussi constants. En utilisant les inégalités précédentes, on obtient finalement :

$$a(u, u)/EI \geq \sum_{e \in \mathcal{K}} \left( 1 - \sum_{s \in \partial e} \left( \alpha_s \frac{c^2}{\epsilon_{1,s}} + \alpha_s \frac{d^2}{\epsilon_{2,s}} \right) \right) \int_{e_i} (u'')^2 dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} ((y_{1,s} - \epsilon_{1,s})[u'_s]^2) + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_c} ((y_{2,s} - \epsilon_{2,s})[u'_s]^2),$$

où  $\alpha_s$  est égal à 1 si  $s \in \mathcal{E}_b$  et 1/2 sinon. Clairement, les conditions suivantes sont suffisantes pour que la forme bilinéaire soit coercive, avec la même constante  $\gamma$  que dans l'inégalité 2.2 :

$$y_{1,s} - \epsilon_{1,s} > \gamma/h \quad y_{2,s} - \epsilon_{1,s} > \gamma/h^3 \quad \left( \alpha_s \frac{c^2}{\epsilon_{1,s}} + \alpha_s \frac{d^2}{\epsilon_{2,s}} \right) < (1 - \gamma)/2 \quad \forall s.$$

Notons que  $\gamma$  doit appartenir à l'intervalle  $(0, 1)$  pour pouvoir prouver la coercivité. Une manière de satisfaire la dernière inégalité est de choisir les paramètres  $\epsilon$  de sorte que :

$$\alpha_s \frac{c^2}{\epsilon_{1,s}} < (1 - \gamma)/4 \quad \alpha_s \frac{d^2}{\epsilon_{2,s}} < (1 - \gamma)/4.$$

Les valeurs limites pour  $\epsilon_{1,s}$  et  $\epsilon_{2,s}$  sont donc  $4\alpha_s c^2/(1-\gamma)$  et  $4\alpha_s d^2/(1-\gamma)$ . On en déduit une condition suffisante sur  $y_1$  et  $y_2$  pour que  $a(\cdot, \cdot)$  soit une forme bilinéaire coercive avec un coefficient  $\gamma$  : il suffit que  $y_{1,s} > 4\alpha_s c^2/(1-\gamma) + \gamma/h$  et  $y_2 > 4\alpha_s d^2/(1-\gamma) + \gamma/h^3$ . Cela implique pour  $x_1$  et  $x_2$  les conditions suivantes :

$$x_{1,s} > 4\alpha_s EI \frac{(p-1)^2}{h(1-\gamma)} + \gamma EI/h \quad x_{2,s} > 4\alpha_s EI \frac{p^2(p-1)^2(p-2)^2}{3h^3(1-\gamma)} + \gamma EI/h^3.$$

Notons que pour  $p = 2$ , la seule contrainte sur  $x_{2,s}$  est d'être supérieur à  $\gamma EI/h^3$ . Comme  $\gamma$  peut être choisi arbitrairement petit, il n'y a pas de borne inférieure sur ce coefficient. Néanmoins, si  $\gamma$  est choisi trop petit, presque rien n'empêche les sauts de la solution aux interfaces entre les éléments, ce qui engendre une erreur importante. Numériquement, on trouve que  $\gamma = 1$ , et par conséquent  $x_{2,s} = EI/h^3$ , fournit de bons résultats. Pour les autres valeurs de  $p$ , il est possible de trouver un coefficient positif  $\gamma$  tel que les inégalités précédentes soient satisfaites lorsqu'on choisit :

$$x_{1,s} = f \cdot 4\alpha_s EI \frac{(p-1)^2}{h} \quad x_{2,s} = f \cdot 4\alpha_s EI \frac{p^2(p-1)^2(p-2)^2}{3h^3},$$

avec  $f > 1$ . Observons que la dépendance de ces paramètres par rapport à  $h$  aurait pu être déduite a priori sur base d'une analyse dimensionnelle. Dans la suite, nous appellerons le paramètre  $f$  facteur de stabilisation. Analysons maintenant numériquement la précision des bornes obtenues. Pour cela, les valeurs propres de la matrice de raideur sont analysées pour différentes valeurs de  $f$ . Si une des valeurs propres est négative, alors la forme bilinéaire n'est plus coercive. Numériquement, il est observé que la valeur limite du paramètre  $f$  est pratiquement indépendante du nombre d'éléments, mais dépend

$d$	2	3	4	5	6
$f^*$	0.5	0.5	0.469	0.425	0.394

TABLE 2.1 – Etude des paramètres stabilisateurs. Le paramètre  $f^*$  est la valeur limite pour laquelle la forme bilinéaire est coercive.

par contre du degré des polynômes utilisés. Les résultats sont donnés dans le tableau 2.1.

La coercivité de la forme bilinéaire est importante dans la preuve de la convergence de la méthode de Galerkin discontinue, comme il sera vu plus tard. Elle permet aussi de voir la méthode de Galerkin discontinue comme un problème de minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$F(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - b(u),$$

sur un espace de polynômes discontinus par morceaux. En effet, si  $u$  est solution de la méthode de Galerkin discontinue et la fonction  $v \in D_k(\mathcal{K})$  est telle que  $v \neq u$ , alors, en introduisant  $z = v - u$ , on a :

$$F(v) = \frac{1}{2}a(u + z, u + z) + b(v) = \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, z) + \frac{1}{2}a(z, z) - b(u) - b(z).$$

Comme  $u$  est solution,  $a(u, z) - b(z) = 0$ , et comme  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive,  $a(z, z) > 0$ . Par conséquent  $F(v) > F(u)$ .

Finalement, la coercivité garantit positivité de la matrice de raideur du système, permettant une intégration stable du système d'équations différentielles régissant l'évolution temporelle de la déflexion de la poutre.

### 2.3.3 Continuité de $a(\cdot, \cdot)$

Dans cette section, on prouve la continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ . Cette propriété est aussi essentielle à la preuve de convergence de la méthode présentée à la section suivante, et s'exprime de la manière suivante :

$$a(u, v) \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H^4(\mathcal{K}),$$

pour une constante  $C$  indépendante de la taille des éléments. Notons que l'espace que nous considérons cette fois, qui garantit que tous les termes de  $a(u, v)$  aient un sens, est de dimension infinie. On ne peut donc pas utiliser les inégalités de trace inverses dérivées dans la section précédente. Pour démontrer la continuité, nous allons montrer que  $a(u, v)^2 \leq C^2 \|u\|^2 \|v\|^2$ . Comme on l'a vu,  $a(u, v)$  consiste en une somme de sept termes :  $a(u, v) = a_1 + a_2 + \dots + a_7$  (1 terme de volume et 6 termes d'interface). Or le carré d'une somme est borné par la somme des carrés, à un facteur près :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

Il suffit donc de montrer que pour chacun des termes,  $a_i^2 \leq C_i |||u|||^2 |||v|||^2$ , pour des constantes  $C_i$  indépendantes de  $h$ .

On borne tout d'abord les termes de volume par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire défini par :

$$(u, v) = \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e uv \, dx.$$

Cela donne directement :

$$\left( \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e \text{EI} u'' v'' \, dx \right)^2 \leq \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e \text{EI} (u'')^2 \, dx \cdot \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e \text{EI} (v'')^2 \, dx \leq |||u|||^2 |||v|||^2.$$

Les termes de pénalisation peuvent aussi être bornés simplement, en utilisant encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois-ci pour les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , où  $n$  est le nombre d'interfaces considérées. Pour la simplicité des notations, les interfaces considérées dans les sommes sont omises.

$$\left( \sum [u']_s x_{1,s} [v']_s \right)^2 \leq \sum [u']_s^2 x_{1,s} \cdot \sum [v']_s^2 x_{1,s} \leq \frac{\max(x_{1,s}^2)}{(\text{EI}/h)^2} |||u|||^2 |||v|||^2$$

$$\left( \sum [u]_s x_{2,s} [v]_s \right)^2 \leq \sum [u]_s^2 x_{2,s} \cdot \sum [v]_s^2 x_{2,s} \leq \frac{\max(x_{2,s}^2)}{(\text{EI}/h^3)^2} |||u|||^2 |||v|||^2.$$

Au vu des expressions des paramètres de stabilisation, les coefficients multipliant les membres de droite sont bien indépendants de  $h$ . Les autres termes d'interfaces sont bornés de manière analogue. Par exemple, on a

$$\left( \sum \langle \text{EI} u'' \rangle_s [v']_s \right)^2 = \left( \sum \sqrt{\text{EI} h} \langle u'' \rangle_s \sqrt{\text{EI}/h} [v']_s \right)^2 \leq \sum \langle \text{EI} h u'' \rangle_s^2 \cdot \sum \text{EI} h^{-1} [v']_s^2.$$

On retrouve ces termes dans le produit  $|||u|||^2 |||v|||^2$ , et ils sont donc bornés par  $|||u|||^2 |||v|||^2$ .

Tous les autres termes d'interfaces peuvent être traités de la même manière. Cela termine la preuve de la continuité de la forme bilinéaire.

### 2.3.4 Convergence de la méthode

Passons maintenant à la preuve de la convergence de la méthode. La preuve donnée ici suit dans les grandes lignes celle proposée par P. Hansbo et M.G. Larson [4] pour la convergence dans le cas des plaques minces. Dans un premier temps, nous allons prouver la convergence dans la norme énergétique. Nous prouverons ensuite la convergence dans la norme  $L^2$ . Avant cela, quelques résultats supplémentaires sont nécessaires, présentés ci-dessous.

### Inégalité triangulaire pour la norme énergétique

La norme énergétique peut être vue comme découlant du produit scalaire suivant :

$$(u, v) = \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e \text{EI} u'' v'' dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} (\text{EI} h \langle u'' \rangle_s \langle v'' \rangle_s + \text{EI} h^{-1} [u']_s [v']_s) \\ + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c \cup \mathcal{E}_s} (\text{EI} h^3 \langle u''' \rangle_s \langle v''' \rangle_s + \text{EI} h^{-3} [u]_s [v]_s).$$

Cela implique l'inégalité triangulaire pour la norme énergétique :

$$\| \|u + v\| \| \leq \| \|u\| \| + \| \|v\| \|.$$

### Inégalité de trace en dimension infinie

Supposons que  $v$  soit une fonction de  $H^1$  sur  $\Omega = (0, L)$ . On montre dans ce paragraphe qu'on peut borner  $v(0)$  par un terme intégré sur tout l'intervalle. Pour montrer cela, utilisons tout d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(v(x) - v(0))^2 = \left( \int_0^x v'(s) ds \right)^2 \leq \int_0^x 1 ds \times \int_0^x (v'(s))^2 ds \\ \leq L \int_0^L (v'(s))^2 ds \\ = L \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En intégrant sur le domaine, on trouve :

$$\| \|v(x) - v(0)\| \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq L^2 \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En prenant la racine carrée des deux côtés et en utilisant l'inégalité triangulaire  $\| \|f - g\| \| \geq \| \|g\| \| - \| \|f\| \|$ , on en déduit

$$| \|v(0)\| \|_{L^2(\Omega)} - \| \|v(x)\| \|_{L^2(\Omega)} | \leq L \|v'\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme  $\| \|v(0)\| \|_{L^2(\Omega)} = v(0) L$ , on obtient finalement l'inégalité de trace suivante :

$$|v(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{L}} (\| \|v\| \|_{L^2(\Omega)} + L \|v'\|_{L^2(\Omega)}).$$

En utilisant le fait que  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , et en prenant le carré de l'expression précédente, on obtient l'inégalité suivante, qui nous sera utile dans la suite :

$$v(0)^2 \leq 2 \left( \frac{1}{L} \| \|v\| \|_{L^2(\Omega)}^2 + L \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.3)$$

### Théorie de l'approximation

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à un opérateur d'interpolation, que l'on appellera  $\pi^p$ , vers l'espace des fonctions polynômiales par morceaux  $D_p(\mathcal{K})$ . Sur chaque élément  $e = [a, b]$  du maillage, on définit  $\pi^p(f)$  comme étant le polynôme d'ordre  $p$  passant exactement par les  $p+1$  points de  $f$  dont les abscisses sont régulièrement distribuées sur l'élément, de  $x_0 = a$  à  $x_p = b$ . Comme les points extrêmes de l'élément font partie des abscisses, cet interpolant est continu pourvu que  $f$  le soit. Si  $f$  est  $p+1$  fois dérivable, l'erreur d'interpolation dans l'élément est donnée par

$$R(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_p) f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!},$$

où  $\xi$  est un point de l'élément. Cette formule de l'erreur d'interpolation a été démontrée dans le cours *FSAB1104 : Introduction aux méthodes numériques* [16]. Dans ce cas :

$$\|f - \pi^p(f)\|_{L^\infty(e)} \leq C_0 h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_{L^\infty(e)}.$$

La fonction  $f$  étant supposée  $p+1$  fois dérivable, l'erreur est par conséquent elle aussi  $p+1$  fois dérivable. Par conséquent, le théorème de Rolle implique que l'erreur commise sur la dérivée s'annule au moins en  $p$  points de l'élément, que nous appelons  $y_0, \dots, y_{p-1}$ . On peut alors appliquer à nouveau la formule de l'erreur d'interpolation pour obtenir l'expression de l'erreur sur la dérivée :

$$D(x) = \frac{(y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_{p-1}) f^{(p+1)}(\eta)}{p!} \rightarrow \|f' - \pi^p(f)'\|_{L^\infty(e)} \leq C_1 h^p \|f^{(p+1)}\|_{L^\infty(e)}.$$

On peut continuer à raisonner de la sorte. De manière générale, on écrit que si  $f$  est une fonction  $p+1$  fois dérivable, et si  $s \leq p+1$ , alors l'interpolant de  $f$ ,  $\pi^p(f)$ , est tel que :

$$\|f^{(s)} - \pi^p(f)^{(s)}\|_{L^\infty(e)} \leq C_s h^{p+1-s} \|f^{(p+1)}\|_{L^\infty(e)}.$$

Notons que dans le cas où  $s = p+1$ ,  $\pi^p(f)^{(s)} = 0$ , et les deux membres de l'inégalité sont égaux si  $C_{p+1} = 1$ . Un résultat similaire existe pour la norme  $L^2$ , dérivé du lemme de Bramble-Hilbert, et possédant des hypothèses de régularité moins restrictives : si  $f$  est une fonction appartenant l'espace de Sobolev  $H^{p+1}(e)$ , alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|f^{(s)} - \pi^p(f)^{(s)}\|_{L^2(e)} \leq C h^{p+1-s} \|f^{(p+1)}\|_{L^2(e)} \quad s = 0, 1, \dots, p+1.$$

Comme la preuve de ce théorème requiert des notions avancées d'analyse fonctionnelle, elle n'est pas développée ici. Le lecteur intéressé peut se référer à [17].

### Précision de l'approximation en norme énergétique

Nous allons maintenant montrer que si la solution exacte  $u$  appartient à  $H^{p+1}(0,1)$  dans le cas  $p \geq 3$ , ou  $H^4(0,1)$  dans le cas  $p = 2$ , alors on a l'inégalité suivante :

$$|||u - \pi^p(u)||| \leq C \begin{cases} h|u|_3 + h^2|u|_4 & \text{si } p = 2 \\ h^{p-1}|u|_{p+1} & \text{si } p \geq 3, \end{cases}$$

où  $|\cdot|_s$  désigne la semi-norme associée à l'espace de Sobolev  $H^s(0,1)$ . Commençons par réécrire le terme de volume en faisant apparaître une norme :

$$\sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e \text{EI} (u'' - \pi^p(u''))^2 dx = \sum_{e \in \mathcal{K}} \text{EI} \|u'' - \pi^p(u'')\|_{L^2(e)}^2.$$

Ensuite, pour les contributions des termes d'interfaces, on utilise l'inégalité de trace 2.3, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \text{EI} h \langle u'' - \pi^p(u'') \rangle_s^2 &\leq C_1 \sum_{e \in \mathcal{K}} \left( \|u'' - \pi^p(u'')\|_{L^2(e)}^2 + h^2 \|u''' - \pi^p(u''')\|_{L^2(e)}^2 \right), \\ \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c \cup \mathcal{E}_s} \text{EI} h^3 \langle u''' - \pi^p(u''') \rangle_s^2 &\leq C_2 \sum_{e \in \mathcal{K}} \left( h^2 \|u''' - \pi^p(u''')\|_{L^2(e)}^2 + h^4 \|u'''' - \pi^p(u''''')\|_{L^2(e)}^2 \right), \\ \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} x_{1,s} [u' - \pi^p(u)']_s^2 &\leq C_3 \sum_{e \in \mathcal{K}} \left( h^{-2} \|u' - \pi^p(u)'\|_{L^2(e)}^2 + \|u'' - \pi^p(u'')\|_{L^2(e)}^2 \right), \end{aligned}$$

où  $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont des constantes indépendantes de  $h$ , englobant chacune plusieurs autres constantes. Pour établir la dépendance en  $h$  dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que  $x_{1,s} \propto 1/h$ . Notons que les termes de type  $x_{2,s} [u - \pi^p(u)]_s$  sont nuls car on a choisi un interpolant continu. En regroupant tous les termes, on a l'inégalité compacte suivante :

$$|||u - \pi^p(u)|||^2 \leq C \sum_{e \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^3 h^{2i-4} \left( \|u^{(i)} - \pi^p(u)^{(i)}\|_{L^2(e)}^2 + h^2 \|u^{(i+1)} - \pi^p(u)^{(i+1)}\|_{L^2(e)}^2 \right), \quad (2.4)$$

pour une nouvelle constante  $C$  indépendante de  $h$ . A ce stade, il convient de séparer le cas  $p \geq 3$  du cas  $p = 2$ . Dans le premier cas, en supposant que  $u \in H^{p+1}$ , on peut utiliser l'expression de l'erreur d'interpolation, pour obtenir :

$$|||u - \pi^p(u)|||^2 \leq C' \sum_{e \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^3 h^{2i-4} \left( h^{2(p+1-i)} \|u^{(p+1)}\|_{L^2(e)}^2 + h^{2(p+1-i)} \|u^{(p+1)}\|_{L^2(e)}^2 \right).$$

Tous les termes sont multipliés par la même puissance de  $h$ , et on a donc :

$$|||u - \pi^p(u)|||^2 \leq C'' \sum_{e \in \mathcal{K}} h^{2p-2} \|u^{(p+1)}\|_{L^2(e)}^2 = C'' h^{2p-2} \|u^{(p+1)}\|_{L^2(0,1)}^2 = C'' h^{2p-2} |u|_{p+1}^2.$$

En prenant la racine carrée des deux membres de l'inégalité, on obtient le résultat annoncé dans le cas  $p \geq 3$ . Dans le cas  $p = 2$ , On ne peut pas appliquer la formule de l'erreur d'interpolation à tous les termes de 2.4. Le terme qui pose problème est

$$\mathcal{T} = \|u^{(i)} - \pi^p(u)^{(i)}\|_{L^2(e)}^2 + h^2 \|u^{(i+1)} - \pi^p(u)^{(i+1)}\|_{L^2(e)}^2,$$

pour  $i = 3$ . Comme on interpole avec un polynôme de degré 2,  $\pi^p(u)^{(4)} = \pi^p(u)^{(3)} = 0$ , et donc

$$\mathcal{T} = \|u^{(3)}\|_{L^2(e)} + h^2 \|u^{(4)}\|_{L^2(e)} = |u|_3 + h^2 |u|_4.$$

Tous les autres termes sont traités comme précédemment, et on obtient finalement :

$$\|u - \pi^2(u)\|^2 \leq Dh^2 (|u|_3^2 + h^2 |u|_4^2),$$

pour une nouvelle constante indépendante de  $h$ . D'où, comme  $c < |a| + |b|$  si  $c^2 < a^2 + b^2$ ,

$$\|u - \pi^2(u)\| \leq D'h (|u|_3 + h|u|_4),$$

ce qui finit la preuve du résultat annoncé.

### Convergence en norme énergétique

Tous les éléments nécessaires sont maintenant à notre disposition pour la preuve de la convergence de la méthode dans la norme énergétique. Notons  $u$  la solution exacte du problème et  $U$  la solution obtenue par la méthode des éléments finis discontinus. La consistance de la méthode, prouvée précédemment, implique que :

$$a(u - U, v) = 0 \quad \forall v \in D_p(\mathcal{K})$$

Cette propriété, appelée la condition d'orthogonalité de Galerkin, est essentielle à la preuve qui suit. Dans la suite, la fonction  $u$  est supposée appartenir à  $H^4$  dans le cas  $p = 2$ , et  $H^{p+1}$  dans le cas  $p \geq 3$ .

Pour prouver la convergence en norme énergétique, on commence par utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\|u - U\| \leq \|u - \pi^p(u)\| + \|\pi^p(u) - U\|.$$

Le premier terme est borné par les résultats de la section précédente. Pour le second, on utilise successivement la coercivité, la condition d'orthogonalité de Galerkin et la continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} c\|\pi^p(u) - U\|^2 &\leq a(\pi^p(u) - U, \pi^p(u) - U) \\ &= a(\pi^p(u) - u, \pi^p(u) - U) \\ &\leq C\|\pi^p(u) - u\| \|\pi^p(u) - U\|. \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par  $|||\pi^p(u) - U|||$ , et en réutilisant la borne de la section précédente pour  $|||\pi^p(u) - u|||$ , on conclut :

$$|||u - U||| \leq A \begin{cases} h|u|_3 + h^2|u|_4 & \text{si } p = 2 \\ h^{p-1}|u|_{p+1} & \text{si } p \geq 3, \end{cases}$$

pour une nouvelle constante  $A$  indépendante de  $h$ .

### Convergence en norme $L^2$

Passons maintenant à la convergence de la méthode dans la norme  $L^2$ . Pour cela, on considère le problème dual, qui consiste à trouver  $\phi$  tel que :

$$a(\phi, v) = \int_0^1 (u - U) v \, dx \quad \forall v \in H^4(\mathcal{K}), \quad (2.5)$$

et on suppose qu'il existe une fonction  $\phi \in H^4(0, 1)$  solution du problème. Autrement dit, pour un chargement  $u - U$ , on suppose que le problème variationnel de la poutre d'Euler-Bernoulli admet une solution qui appartient à  $H^4$ . On suppose aussi que  $\phi$  dépend continument de  $u - U$  de la manière suivante :

$$||\phi||_4 \leq C ||u - U||_{L^2(0,1)}. \quad (2.6)$$

Cela peut se justifier par le fait que  $\phi$  satisfait la formulation faible au dessus, qui est associée à l'équation différentielle des poutres, soit  $\phi'''' = u - U$ . Une justification plus précise sort du cadre de ce travail, mais est présentée dans [3] par G. Engel et al. Par l'équation 2.5, on a en particulier que

$$a(\phi, u - U) = \int_0^1 (u - U)^2 \, dx = ||u - U||_{L^2(0,1)}^2.$$

Soit maintenant  $\pi^{d(p)}(\phi)$  l'approximation de  $\phi$  par des polynômes par morceaux de degré inférieur ou égal à  $d(p)$ . On choisit le degré d'approximation comme  $d(p) = 2$  dans le cas  $p = 2$ , et  $d(p) = 3$  dans le cas  $p \geq 3$ . On pourrait choisir un degré d'approximation plus élevé, mais cela ne conduirait pas à une meilleure estimation de l'erreur puisque  $\phi \in H^4(0, 1)$ . Comme  $d(p) \leq p$ , la condition d'orthogonalité de Galerkin implique que :

$$a(u - U, \pi^{d(p)}(\phi)) = a(\pi^{d(p)}(\phi), u - U) = 0.$$

Sous les hypothèses précédentes, on a, en utilisant successivement le fait que  $\phi$  est solution du problème dual, la condition d'orthogonalité de Galerkin et la continuité de

la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} \|u - U\|_{L^2(0,1)}^2 &= a(\phi, u - U) \\ &= a(\phi - \pi^{d(p)}(\phi), u - U) \\ &\leq C \|u - U\| \|\phi - \pi^{d(p)}(\phi)\|. \end{aligned}$$

On utilise ensuite le résultat de convergence en norme énergétique ainsi que la borne obtenue sur l'erreur d'interpolation en norme énergétique. Pour  $p = 2$ , cela donne, en supposant que  $u \in H^4(0, 1)$  :

$$\|u - U\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C' (h|u|_3 + h^2|u|_4) (h|\phi|_3 + h^2|\phi|_4). \quad (2.7)$$

Le deuxième terme est borné en utilisant l'hypothèse de régularité 2.6 :

$$h|\phi|_3 + h^2|\phi|_4 \leq C''(h + h^2)\|\phi\|_4 \leq 2C'' h \|u - U\|_{L^2(0,1)},$$

où la dernière inégalité vient du fait que  $h \leq 1$ , puisque  $h$  est la taille moyenne des éléments en unités normalisées à la taille du domaine. En divisant ensuite les deux membres de l'inégalité 2.7 par  $\|u - U\|_{L^2(0,1)}$ , on obtient finalement :

$$\|u - U\|_{L^2(0,1)} \leq h^2(|u|_3 + h|u|_4),$$

qui est le résultat de convergence final pour  $p = 2$ . Pour  $p \geq 3$ , on a choisi un interpolant de degré 3, et par conséquent, comme on a supposé que la fonction  $\phi$  appartenait à l'espace  $H^4(0, 1)$ , la borne sur l'erreur d'interpolation en norme énergétique est  $\|\phi - \pi^3(\phi)\| \leq Ch^2|\phi|_4$ , pour une nouvelle constante  $C$  indépendante de  $h$ . En supposant que  $u \in H^{p+1}(0, 1)$ , et en utilisant le résultat de convergence en norme énergétique et l'hypothèse de régularité 2.6, on a :

$$\|u - U\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C' (h^{p-1}|u|_{p+1}) (h^2|\phi|_4) \leq C'' (h^{p+1}|u|_{p+1}) \|u - U\|_{L^2(0,1)}.$$

Le résultat de convergence s'obtient en divisant les deux membres par  $\|u - U\|_{L^2}$ .

Finalement, si  $u \in H^4(0, 1)$  dans le cas  $p = 2$ , et  $u \in H^{p+1}(0, 1)$  dans le cas  $p \geq 3$ , alors :

$$\|u - U\|_{L^2(0,1)} \leq B \begin{cases} h^2(|u|_3 + h|u|_4) & \text{si } p = 2 \\ h^{p+1}|u|_{p+1} & \text{si } p \geq 3, \end{cases}$$

où  $B$  est une constante indépendante de  $h$ . Dans les analyses de convergence qui suivent, c'est cette norme qu'on utilisera, surtout parce qu'elle est plus commode à calculer.

## Tests de convergence

Dans ce paragraphe, nous allons vérifier les résultats de convergence obtenus à la section précédente. Un maillage uniforme est utilisé sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On considère de plus

un chargement cosinusoidal :  $q(x) = p \cos(2\pi x)$ . La solution exacte est alors :

$$w(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{p}{EI} (\cos(2\pi x) - 1)$$

et elle satisfait clairement toutes les hypothèses de régularité nécessaire à l'application des résultats dérivés dans la section précédente. Nous allons commencer par le cas  $p = 2$ . Dans ce cas, l'analyse précédente prévoit que l'erreur évolue en  $\mathcal{O}(h^2)$ . C'est bien ce que l'on observe à la figure 2.1.

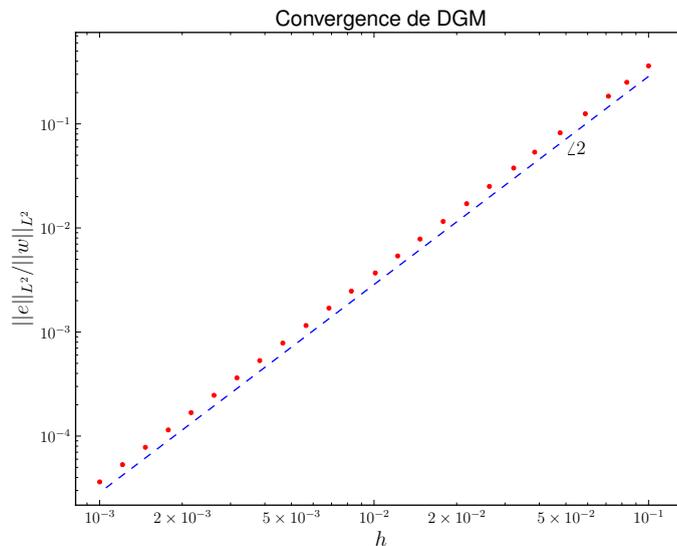


FIGURE 2.1 – Erreur en norme  $L^2$  pour  $p = 2$ . La convergence est en  $\mathcal{O}(h^2)$

Passons maintenant au cas  $p = 3$ . A la figure 2.2, les courbes de convergence sont présentées pour  $f = 1$  et  $f = 100$ . On observe tout d'abord qu'au dessous d'une certaine valeur de  $h$ , l'erreur ne diminue plus. Cela est dû au fait que quand  $h$  devient petit, le conditionnement de la matrice de raideur se détériore très vite. On montre plus loin qu'en fait, le nombre de condition évolue en  $\mathcal{O}(h^{-4})$ .

Ensuite, on constate que pour un facteur de stabilisation  $f$  égal à 1, c'est à dire pour des coefficients de stabilisation égaux aux limites que nous avons dérivées théoriquement, la convergence est en  $\mathcal{O}(h^{4.5})$ , ce qui est meilleur que ce que prédit la section précédente. Cela reste vrai pour d'autres facteurs de stabilisation proche de 1. Par contre, pour des facteurs de stabilisation plus grands, à partir d'environ  $f = 5$ , le taux de convergence rejoint sa valeur théorique, à savoir  $\mathcal{O}(h^4)$ . Néanmoins, si le taux de convergence est meilleur pour un coefficient de stabilisation petit, le coefficient multipliant la puissance de  $h$  est clairement plus grand pour  $f = 1$  que dans le cas  $f \gg 1$ , et lorsque  $h$  appartient à une plage de valeurs pour laquelle le conditionnement de la matrice n'introduit pas d'erreur significative, l'erreur commise en utilisant un grand coefficient de stabilisation est moins importante.

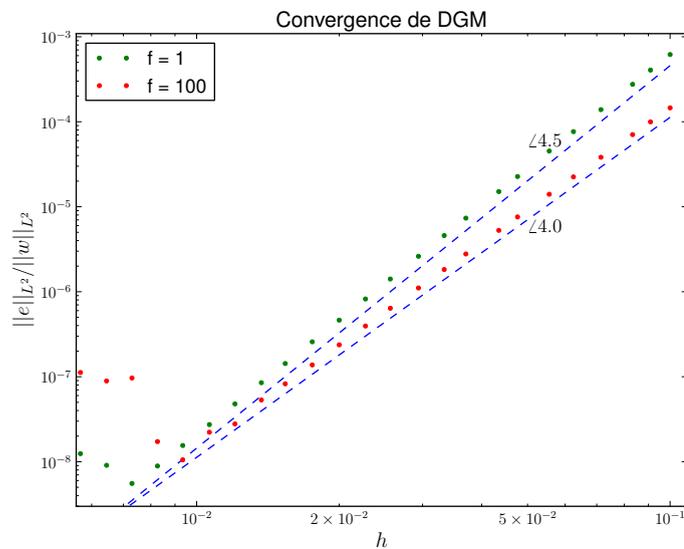


FIGURE 2.2 – Convergence de la méthode pour  $f = 1$  (haut) et  $f = 100$  (bas), dans le cas  $p = 3$ .

Dans les cas  $p = 4$  et  $p = 5$ , la convergence est d'ordre  $p + 1$ , pour tout facteur stabilisateur  $f > 1$ . Les courbes de convergences sont données à la figure 2.3. Observons que, lorsque  $p$  augmente, le conditionnement de la matrice impose une limite de plus en plus petite sur le nombre d'éléments utilisables. Cela est dû au fait qu'à nombre d'éléments égal, la précision de la méthode augmente avec le degré, et le conditionnement est d'autant plus important que le degré des polynômes est grand.

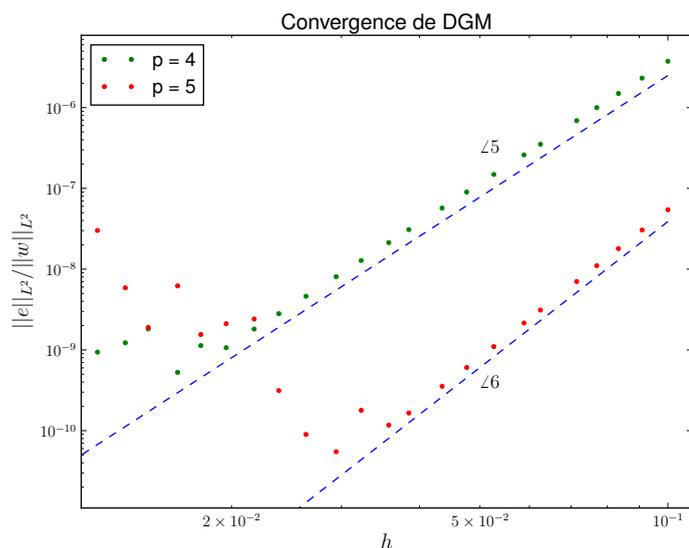


FIGURE 2.3 – Convergence de la méthode pour  $f = 1$ , dans les cas  $p = 4$  et  $p = 5$ .

### 2.3.5 Propriétés de dispersion et dissipation

On étudie dans cette section le problème dynamique concernant une poutre non chargée de longueur infinie. L'équation dynamique de la poutre est dans ce cas

$$\text{EI} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

L'analyse qui suit se base sur les travaux effectués par Atkins et Hu pour l'équation d'advection dans [6]. Cette équation admet des solutions de type "ondes planes". Pour les trouver, cherchons des solutions de la forme  $w(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ . En substituant cette fonction dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient l'équation suivante :

$$\text{EI} k^4 - \mu \omega^2 = 0,$$

appelée relation de dispersion. Pour une fréquence temporelle donnée, elle admet 4 solutions :

$$k = \pm \left( \frac{\mu}{\text{EI}} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \quad k = \pm i \left( \frac{\mu}{\text{EI}} \right)^{1/4} \sqrt{\omega}.$$

Les deux premières solutions correspondent à des ondes planes, tandis que les deux autres donnent des solutions exponentielles. Les ondes planes se déplacent à une vitesse de phase égale à  $c(\omega) = (\text{EI}/\mu)^{1/4} \sqrt{\omega}$ .

Le schéma numérique supporte aussi des solutions de type ondulatoire. Néanmoins, les ondes numériques ne se propagent généralement pas avec la bonne vitesse, ce qui entraîne une erreur de dispersion, et de plus les ondes peuvent être atténuées, donnant lieu à une erreur de dissipation. On suppose, dans cette section, que l'intégration temporelle est effectuée parfaitement, et que la seule erreur vient de la discrétisation spatiale par la méthode de Galerkin discontinue. Un maillage uniforme est utilisé, avec une taille de maille égale à  $h$ . Dans ce cas, la solution obtenue par la méthode DG satisfait dans chaque élément l'équation suivante :

$$\int_e \mu \ddot{v} v \, dx + \int_e \text{EI} w_{,xx} v_{,xx} \, dx + \sum_{s \in \partial e} \left( \langle \text{EI} w_{,xx} \rangle_s [v_{,x}]_s + \langle \text{EI} v_{,xx} \rangle_s [w_{,x}]_s + [w_{,x}]_s x_{1,s} [v_{,x}]_s \right) + \sum_{s \in \partial e} \left( - \langle \text{EI} w_{,xxx} \rangle_s [v]_s - \langle \text{EI} v_{,xxx} \rangle_s [w]_s + [w]_s x_{2,s} [v]_s \right) = 0 \quad \forall v \in P_p(e),$$

où  $P_p(e)$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  s'annulant hors de  $e$ . Comme le maillage est uniforme,  $x_{1,s}$  et  $x_{2,s}$  peuvent être choisis identiques pour toutes les interfaces, et seront donc notés  $x_1$  et  $x_2$ . Effectuons maintenant un changement de variables défini sur l'élément  $n$  par

$$\xi = 2(x - \hat{x}_n)/h \quad \text{avec} \quad \hat{x}_n = (x_{n-1} + x_n)/2,$$

et où  $x_{n-1}$  et  $x_n$  sont les abscisses des frontières de l'élément, et  $h$  est la taille des éléments. De manière générale, la solution obtenue par la méthode de Galerkin discontinue peut s'écrire sur un élément  $n$  :

$$w_n(\xi) = \sum_{i=0}^p c_{n,i}(t) L_i(\xi),$$

où  $L_i$  est le polynôme de Legendre de degré  $i$  sur  $[-1, 1]$ . Nous allons tenter de trouver des solutions ondulatoires du problème. On suppose pour cela que la solution est telle que

$$c_{i,n}(t) = C_i e^{i\omega t} \lambda^n,$$

où  $C_i$  est une constante indépendante du temps et de l'élément, tandis que  $\lambda$  est une constante pouvant être complexe. Idéalement, on voudrait que le schéma numérique puisse représenter une onde plane se déplaçant à la bonne vitesse, et on aimerait donc trouver une solution telle que :  $\lambda \approx e^{-ik(\omega)h}$ . En notant  $\mathbf{c} = (C_0 \ C_1 \ \dots \ C_p)^T$ , on obtient, en substituant  $v$  par les différents polynômes de Legendre sur l'élément dans l'expression variationnelle, que  $\mathbf{c}$  doit satisfaire le système suivant :

$$\left( -\frac{h^4}{16} \frac{\mu}{\text{EI}} \omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S} + \mathbf{I}_l(\lambda) + \mathbf{I}_r(\lambda) \right) \cdot \mathbf{c} = 0. \quad (2.8)$$

où les termes  $\mathbf{I}_l$  et  $\mathbf{I}_r$  concernent les interfaces gauches et droites. Les différents termes sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{-1}^1 L_i L_j d\xi & S_{ij} &= \int_{-1}^1 L_i'' L_j'' d\xi \\ I_{r,ij} &= L_i(1) \left( \frac{1}{2} (L_j'''(1) + \lambda L_j'''(-1)) \right) - \frac{1}{2} L_i'''(1) (\lambda L_j(-1) - L_j(1)) \\ &\quad - L_i'(1) \left( \frac{1}{2} (L_j''(1) + \lambda L_j''(-1)) \right) + \frac{1}{2} L_i''(1) (\lambda L_j'(-1) - L_j'(1)) \\ &\quad - \frac{h^3 x_2}{8 \text{EI}} L_i(1) (\lambda L_j(-1) - L_j(1)) \\ &\quad - \frac{h x_1}{2 \text{EI}} L_i'(1) (\lambda L_j'(-1) - L_j'(1)) \\ I_{l,ij} &= -L_i(-1) \left( \frac{1}{2} \left( L_j'''(-1) + \frac{1}{\lambda} L_j'''(1) \right) \right) - \frac{1}{2} L_i'''(-1) \left( L_j(-1) - \frac{1}{\lambda} L_j(1) \right) \\ &\quad + L_i'(-1) \left( \frac{1}{2} \left( L_j''(-1) + \frac{1}{\lambda} L_j''(1) \right) \right) + \frac{1}{2} L_i''(-1) \left( L_j'(-1) - \frac{1}{\lambda} L_j'(1) \right) \\ &\quad + \frac{h^3 x_2}{8 \text{EI}} L_i(-1) \left( L_j(-1) - \frac{1}{\lambda} L_j(1) \right) \\ &\quad + \frac{h x_1}{2 \text{EI}} L_i'(-1) \left( L_j'(-1) - \frac{1}{\lambda} L_j'(1) \right). \end{aligned}$$

Etant donné que  $x_1 \propto \text{EI}/h$  et  $x_2 \propto \text{EI}/h^3$ , les termes  $(h x_1/2\text{EI})$  et  $(h^3 x_2/8\text{EI})$  ne dépendent pas de  $E$ ,  $I$  et  $h$ . L'équation 2.8 n'admet de solution non triviale que si le

déterminant de la matrice multipliant  $\mathbf{c}$  est nul. Numériquement, en utilisant l'outil de calcul symbolique de Matlab, on trouve que le déterminant s'annule aux racines d'un polynôme de degré 8 en  $\lambda$ . Parmi ces racines, 4 correspondent aux 4 modes exacts trouvés plus haut, tandis que les 4 autres sont des modes parasites. On remarque donc qu'il y a un mode parasite par mode physique, ce qui est consistant avec les résultats de Hu et Atkins. Par contre, contrairement aux résultats présentés dans leur article, les modes parasites obtenus pour les poutres ne sont pas tous stables, car la moitié d'entre eux croissent dans leur direction de propagation. Des modes instables ne sont néanmoins jamais observés pour des domaines finis, étant donné la positivité de la matrice de raideur.

L'équation fait aussi apparaître que les racines sont fonctions de la quantité adimensionnelle  $h^4 \omega^2 \mu / EI = k^4 h^4$ , où  $k$  est le nombre d'onde exact associé à la fréquence  $\omega$ . Les solutions dépendent donc uniquement de  $k(\omega)h$ , qui est lié par un facteur  $2\pi$  au rapport entre la taille d'un élément et la longueur d'onde.

Pour un mode physique correspondant à une onde plane, on définit le nombre d'onde numérique adimensionnel comme  $k_h = -\log(\lambda)/i$ , de sorte que  $\lambda = e^{-ik_h}$ . On définit ensuite l'erreur de dispersion comme  $|Re(k_h) - kh|$  et l'erreur de dissipation comme  $|Im(k_h)|$ . L'erreur de dispersion induit une erreur dans la vitesse de phase des ondes, tandis que l'erreur de dissipation engendre une dissipation, ou un accroissement non désiré de l'amplitude des ondes. Numériquement, on trouve que l'erreur de dissipation de la méthode est nulle. On trouve d'autre part que l'erreur de dispersion des modes physiques est de l'ordre  $(kh)^{2p-1}$ , comme illustré à la figure 2.4. Cette ordre de convergence est un peu moins bon que celui trouvé par Hu et Atkins pour l'équation d'advection, qui est lui égal à  $(kh)^{2p+3}$ , ce qui peut être dû au fait qu'on a affaire à une équation du quatrième ordre.

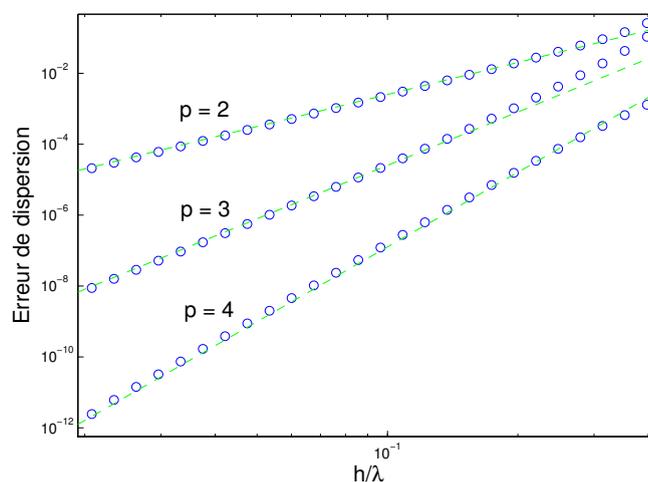


FIGURE 2.4 – Erreur de dispersion  $|Re(k_h - kh)|$

A la figure 2.5, les modes propres sont illustrés dans les cas  $\lambda/h = 3$  et  $\lambda/h = 5$ . Seuls quatre des modes sont dessinés, les quatre autres pouvant être simplement obtenus par symétrie. On constate que ces modes sont beaucoup mieux résolus dans le second cas, ce qui est logique puisque plus d'éléments sont utilisés pour approximer une période spatiale de l'onde.

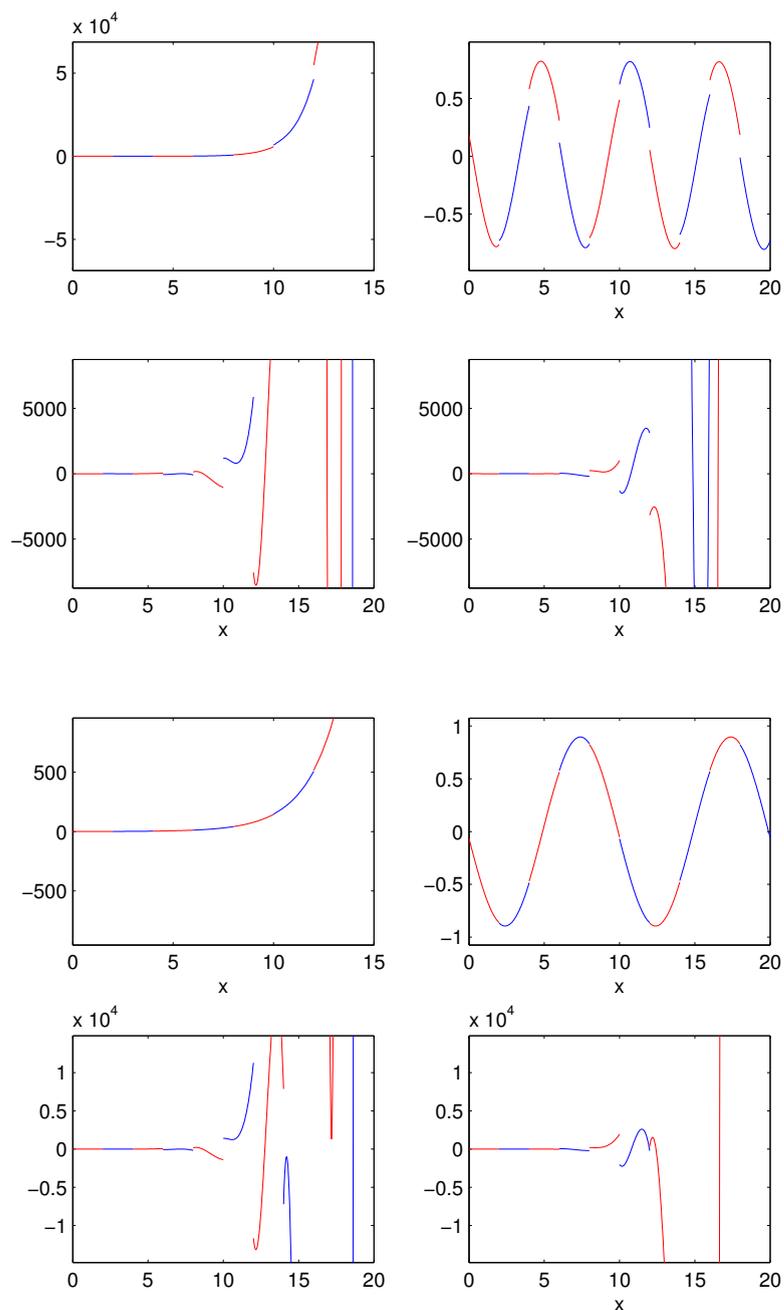


FIGURE 2.5 – Modes propres obtenus par l'analyse fréquentielle pour  $\lambda/h = 3$  (haut) et  $\lambda/h = 5$  (bas). Sur chaque figure, les deux modes du dessus sont des modes physiques, tandis que les deux modes du dessous sont des modes parasites.

### 2.3.6 Conditionnement du système linéaire

On considère dans cette section une poutre finie soumise à des conditions aux limites périodiques. A la section précédente, nous avons montré que le fait qu'un mode soit résolu ou pas dépend du nombre d'onde adimensionnel  $kh$  du mode. Bien que ce résultat ait été démontré pour un maillage infini, il est aussi valable pour des maillages finis. On en déduit que le nombre de modes résolus sur un maillage donné est de l'ordre du nombre  $N$  d'éléments du maillage. Ces modes de vibration numériques correspondent aux fonctions propres de l'opérateur de dérivée quatrième, muni des conditions aux limites périodiques. Comme les valeurs propres de cet opérateur sont proportionnelles à  $k^4$ , et que, d'autre part, les valeurs propres liées aux modes résolus sont bien approximées numériquement dans le spectre de  $M^{-1}K$ , on en déduit que le rapport des valeurs propres extrêmes de  $M^{-1}K$  est au moins de l'ordre de  $N^4$ . En utilisant la propriété de sous-multiplicativité de la norme  $\|\cdot\|_2$ , on a :

$$\kappa_2(M^{-1}K) = \|(M^{-1}K)^{-1}\|_2 \cdot \|M^{-1}K\|_2 \leq \|K^{-1}\|_2 \cdot \|K\|_2 \|M^{-1}\|_2 \cdot \|M\|_2 = \kappa_2(K)\kappa_2(M),$$

d'où  $\kappa_2(K)\kappa_2(M) \geq C N^4$ . Comme la matrice  $M$  est bloc diagonale, et que les blocs sont tous identiques à un facteur près, son nombre de condition est indépendant du nombre d'éléments. On en déduit finalement que  $\kappa_2(K) \geq C N^4$ , pour une nouvelle constante  $C$  indépendante du nombre d'éléments. Expérimentalement, on observe en fait qu'on a exactement  $\kappa_2(K) \propto N^4$ , comme illustré à la figure 2.6.

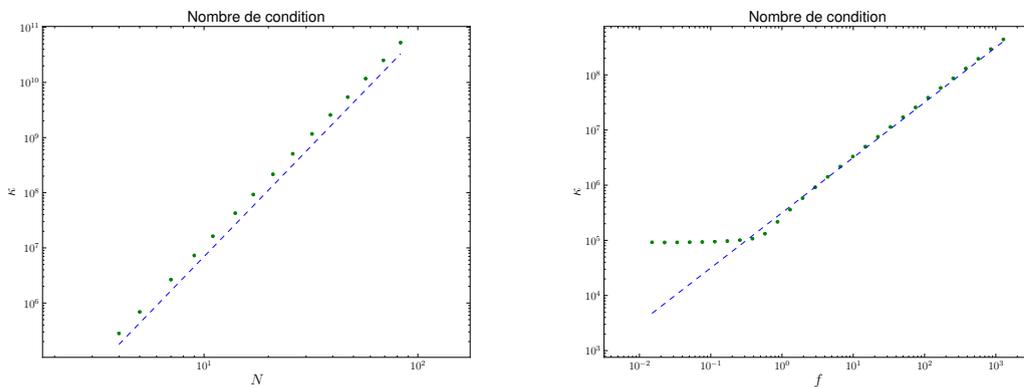


FIGURE 2.6 – A gauche : nombre de conditions de la matrice de raideur pour  $p = 4$ , en vert, en fonction du nombre d'éléments du maillage. En bleu, droite de pente 4. A droite : nombre de condition de la matrice de raideur pour  $p = 4$ , en vert, en fonction du facteur de stabilisation choisi. En bleu, droite de pente 1. La dépendance est clairement en  $\mathcal{O}(f)$ .

Intéressons nous maintenant à l'influence des paramètres stabilisateurs sur le nombre de condition de la méthode. Pour cela, on choisit comme paramètre le facteur  $f$  multipliant les paramètres minimaux théoriques. La dépendance du nombre de condition par rapport au paramètre  $f$  est illustrée à droite sur la figure 2.6. On remarque que, lorsque  $f < 1$ ,

le nombre de condition ne dépend presque pas de  $f$ . Dans cette région la matrice de raideur n'est pas définie positive. Lorsque  $f > 1$ , la dépendance est linéaire.

On observe, par expérimentations numériques, que les résultats mis en évidence dans cette section sont aussi valables pour d'autres conditions aux limites.

## 2.4 Problème de grands déplacements

Pour terminer ce chapitre, on étend la méthode de Galerkin discontinue aux problèmes de poutres en grands déplacements. On considère tout d'abord que l'effort axial dans la poutre est spécifié. Dans le cas contraire, si on considère par exemple une poutre dont le déplacement axial est bloqué à chaque extrémité, le problème devient non-linéaire, et il faut souvent procéder par itérations pour trouver la solution. Comme le traitement des poutres en grands déplacements est similaire à celui des plaques, que nous traiterons dans le chapitre suivant, nous allons directement passer aux résultats. La formulation de Galerkin discontinue utilisée pour résoudre l'équation  $(EI w'')'' - Pw'' = q(x)$ , vue à la section 1.2.2, est la suivante :

$$\sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e EI w'' v'' + P v' w' dx + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \left( \langle EI w'' \rangle_s [v']_s + \langle EI v' \rangle_s [w']_s + [w']_s x_{1,s} [v']_s \right) + \sum_{s \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_f} \left( - \langle EI w''' - Pw' \rangle_s [v]_s - \langle EI v''' - Pv' \rangle_s [w]_s + [w]_s x_{2,s} [v]_s \right) = 0 \quad \forall v \in D_p(\mathcal{K}).$$

Pour que la forme bilinéaire soit coercive, il faut adapter les coefficients de stabilisation. Cela peut se faire en utilisant exactement la même méthode que précédemment, et nous ne traiterons donc pas davantage ce sujet.

Tentons maintenant d'appliquer la méthode pour trouver la déflexion d'une poutre bi-encastrée en grands déplacements, pour laquelle tous les déplacements sont bloqués aux deux extrémités. Dans ce cas, l'effort axial dans la poutre n'est pas connu à l'avance, et il faut donc procéder par itérations. Remarquons d'abord que si  $w$  est la solution exacte du problème, alors l'effort axial  $N$  est constant dans la poutre (voir section 1.2.2). En utilisant l'expression de celui-ci, on en déduit l'égalité suivante :

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L N dx = \frac{1}{L} \int_0^L EA \left( u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) dx = \frac{EA}{L}(u(L) - u(0)) + \frac{EA}{2L} \int_0^L (w')^2 dx.$$

Le premier terme est nul par les conditions aux frontières. L'équation non-linéaire à résoudre est donc en fait donnée par :

$$(EI w'')'' - \frac{EA}{2L} \int_0^L (w')^2 dx \cdot w'' = q(x).$$

Pour trouver numériquement la solution du problème, on peut utiliser le schéma itératif très simple suivant : partant d'une solution initiale  $w_0$ , on calcule l'effort normal moyen dans la poutre  $N$ , et on utilise ensuite ce dernier pour trouver une nouvelle solution. En d'autres termes, on utilise l'itération suivante :

$$N_{n+1} = \frac{EA}{2L} \int_0^L (w'_n)^2 dx \quad (EI w''_{n+1})'' - N_{n+1} \cdot w''_{n+1} = q(x),$$

où les indices  $n$  et  $n + 1$  désignent deux itérations successives. Considérons par exemple une poutre de longueur  $L = 1$  [m], telle que  $EI = 1$  [Nm<sup>2</sup>], et  $q = 10$  [Nm<sup>-1</sup>]. On suppose que la poutre est de section carrée, et par conséquent  $I = h^4/12$ . On choisit de plus  $h = 1$  [cm], de sorte que la poutre soit élancée et que la théorie des poutres en grands déplacements apporte une réelle amélioration par rapport au modèle d'Euler-Bernoulli. Cela donne donc  $EA = 120000$  [N]. Le résultat, obtenu avec la méthode de Galerkin discontinue, est présenté à la figure 2.7, parallèlement à la solution obtenue en résolvant l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli. Comme on peut le voir, le modèle des poutres en grands déplacement, qui tient compte de l'élongation de la fibre moyenne, donne une déflexion significativement plus petite.

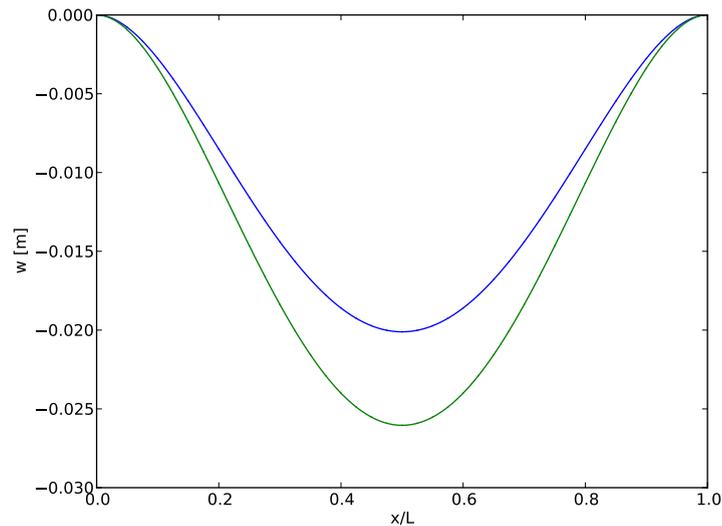


FIGURE 2.7 – Déflexion d'une poutre dans le cadre des petites déformations - grands déplacements, obtenue par la méthode de Galerkin discontinue, en bleu. En vert, déflexion obtenue par la théorie de Bernoulli.

Ceci clôture notre étude de la méthode de Galerkin discontinue pour les poutres. Dans le chapitre suivant, la méthode est développée et analysée pour les plaques.



## Chapitre 3

# Etude de la méthode des éléments finis discontinus pour les plaques

Ce chapitre traite de la méthode de Galerkin discontinue pour les problèmes de plaques. Dans la première partie, la méthode est développée pour les plaques minces de Kirchhoff-Love en petites perturbations. Dans la deuxième partie, la méthode est étendue afin de pouvoir traiter des problèmes de flambements. Plusieurs cas-tests sont traités afin de valider la méthode.

### 3.1 DGM pour les plaques de Kirchhoff-Love

Dans cette section, la méthode de Galerkin discontinue, abrégée DGM, est appliquée à la résolution l'équation fondamentale des plaques minces de Kirchhoff-Love. Les propriétés de consistance, stabilité et convergence de la méthode sont ensuite analysées. Pour terminer cette section, le méthode est utilisée en vue de déterminer les modes d'une plaque circulaire.

#### 3.1.1 Formulation variationnelle

On suppose que la plaque occupe une région  $\Omega$  du plan  $xy$ , et que les frontières de la plaques sont libres, simplement supportées, ou encastées. Dans un second temps, des conditions aux limites plus compliquées seront traitées. La première étape est d'effectuer un maillage du domaine, avec des triangles ou des quadrilatères. Dans ce travail de fin d'études, seul des triangles ont été utilisés, mais la formulation établie dans la suite est générale. Comme dans le chapitre précédent, on nomme  $\mathcal{K}$  l'ensemble des éléments du maillage, et  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes de celui-ci. On définit, de plus,  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{E}_f$ ,  $\mathcal{E}_s$  et  $\mathcal{E}_c$  comme étant les ensembles des arêtes intérieures, libres, simplement supportées, et encastées.

L'équation fondamentale régissant la déflexion des plaques minces de Kirchhoff-Love est la suivante :

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}.$$

Pour développer la formulation de Galerkin discontinue, il est plus simple d'écrire cette équation de la manière suivante (voir section 1.3) :

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = q.$$

Dans cette équation, le terme de gauche dépend de la solution  $w$ , mais nous ne le notons pas pour alléger les notations. En multipliant cette équation par une fonction de test  $v$ , et en intégrant les deux membres de l'équation résultante sur un élément  $e$ , l'équation suivante est obtenue :

$$\int_e -M_{\alpha\beta,\alpha\beta} v dA = \int_e q v dA.$$

Nous allons d'emblée supposer que la fonction de test est polynomiale par morceaux sur le maillage, ce qu'on note  $v \in D_p(\mathcal{K})$ . En utilisant deux fois l'intégration par parties, ainsi que la symétrie de  $M$  et l'égalité des dérivées croisées, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \int_e -M_{\alpha\beta,\alpha\beta} v dA &= \int_e M_{\alpha\beta,\alpha} v_{,\beta} dA - \int_{\partial e} M_{\alpha\beta,\alpha} v n_\beta dl \\ &= - \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} dA + \int_{\partial e} M_{\alpha\beta} v_{,\alpha} n_\beta dl - \int_{\partial e} M_{\alpha\beta,\alpha} v n_\beta dl. \end{aligned}$$

En utilisant les notations introduites dans le chapitre 1, cette expression peut être réécrite comme suit :

$$\int_e -M_{\alpha\beta,\alpha\beta} v dA = - \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} dA + \int_{\partial e} M_{nn} v_{,n} + M_{nt} v_{,t} dl - \int_{\partial e} (M_{nn,n} + M_{nt,t}) v dl.$$

Notons que nous suivons une démarche inverse à celle effectuée dans la dérivation de l'équation aux dérivées partielles. Dans cette dernière expression, on peut intégrer par parties l'intégrale contenant le terme  $M_{nt} v_{,t}$ , ce qui donne,

$$\int_{\partial e} M_{nt} v_{,t} dl = \sum_{s \in \partial e} \int_s M_{nt} v_{,t} dl = \sum_{s \in \partial e} - \int_s M_{nt,t} v dl + (M_{nt} v n_{\partial s})_{\partial s},$$

où les notations sont les mêmes que celles utilisées au chapitre 1. En utilisant ce résultat, et en séparant les contributions de chacune des arêtes, on trouve finalement que la solution exacte satisfait :

$$- \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} dA + \sum_{s \in \partial e} \left( \int_s M_{nn} v_{,n} dl - \int_s (M_{nn,n} + 2 M_{nt,t}) v dl + (M_{nt} v n_{\partial s})_{\partial s} \right) = \int_e q v dA.$$

Cette équation exprime, comme pour les poutres, le principe des travaux virtuels sur l'élément, pour un déplacement virtuel de la surface moyenne égal à  $v$ . On reconnaît, dans la deuxième intégrale faite sur les arêtes, l'effort tranchant effectif  $T_n$ . En établissant cette équation pour tous les éléments et en additionnant, on obtient que la solution exacte

du problème satisfait l'équation suivante, pour toute fonction  $v \in D_p(\mathcal{K})$ .

$$\sum_{e \in \mathcal{K}} \left( - \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} dA + \sum_{s \in \partial e} \left( \int_s M_{nn} v_{,n} dl - \int_s T_n v dl + ([M_{nt} v] n_{\partial s})_{\partial s} \right) \right) = \int_A qv dA.$$

Rappelons que, dans cette équation, tous les efforts internes dépendent de  $w$ . Dans la somme, chaque arête est prise en compte deux fois. On peut la réécrire pour ne conserver qu'un seul terme par arête, en faisant apparaître des termes de saut. Introduisons pour cela la notation suivante :

$$[v]_s = \begin{cases} v^+ - v^- & s \in \mathcal{E}_i \\ v^+ & s \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_i, \end{cases}$$

où  $v^\pm(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v(x \mp \epsilon n)$ . L'égalité précédente peut dès lors être réécrite comme

$$- \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} dA + \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( \int_s [M_{nn} v_{,n}] dl - \int_s [T_n v] dl + ([M_{nt} v] n_{\partial s})_{\partial s} \right) = \int_A qv dA.$$

Pour établir la formulation variationnelle, on procède de la même manière que pour les poutres d'Euler-Bernoulli. D'abord, on note que si  $w$  est la solution exacte, alors les moments et efforts tranchant associées à cette solution sont continus. Par conséquent, on peut remplacer dans l'égalité ci-dessus  $[M_{nn} v_{,n}]$  par  $M_{nn} [v_{,n}]$ ,  $[T_n v]$  par  $T_n [v]$ , et  $[M_{nt} v]$  par  $M_{nt} [v]$ . Introduisons à présent l'opérateur  $\langle \cdot \rangle$ , faisant la moyenne d'une fonction des deux côtés d'une arête :

$$\langle v \rangle_s = \begin{cases} (v^+ + v^-)/2 & s \in \mathcal{E}_I \\ v^+ & s \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_I. \end{cases}$$

Toujours par régularité de la solution exacte, on peut remplacer dans l'expression précédente les quantités  $M_{nn}$ ,  $T_n$  et  $M_{nt}$  par  $\langle M_{nn} \rangle$ ,  $\langle T_n \rangle$  et  $\langle M_{nt} \rangle$ . Ensuite, on laisse tomber les termes qui s'annulent identiquement pour la solution exacte par les conditions aux limites, et on ajoute des termes afin de pouvoir écrire la formulation avec une forme bilinéaire symétrique, ainsi que des termes de stabilisation pour pénaliser les sauts de la déflexion et du gradient de celle-ci.

Le terme liés aux coins du domaine nécessite néanmoins des explications additionnelles. Rappelons qu'à chaque coin du domaine, on peut imposer physiquement deux types de conditions aux frontières, comme on l'a vu dans la section 1.3.2. Soit une force ponctuelle est appliquée au coin, imposant la valeurs de  $M_{n_1 t_1} - M_{n_2 t_2}$ , soit le déplacement est imposé au coin. En particulier, cela implique pour les conditions aux limites classiques que  $M_{n_1 t_1} = M_{n_2 t_2}$  pour un coin libre, et  $w = 0$  pour un coin appartenant à une frontière simplement supportée ou encastree. Repartons dès lors du terme de coin de l'expression précédente, que nous appelons  $\phi$  :

$$\phi(w, v) = \sum_{s \in \mathcal{E}} (M_{nt}(w) [v] n_{\partial s})_{\partial s}.$$

Comme  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_b$ , et que  $[w] = 0$  sur les arêtes intérieures du domaine lorsque  $w$  est la solution exacte du problème, on a dans ce cas :

$$\phi(w, v) = \sum_{s \in \mathcal{E}_i} \left[ \langle M_{nt}(w) \rangle [v] n_{\partial s} \rangle_{\partial s} + \langle M_{nt}(v) \rangle [w] n_{\partial s} \rangle_{\partial s} \right] + \sum_{s \in \mathcal{E}_b} (M_{nt}(w) v n_{\partial s})_{\partial s}.$$

Le second terme doit être traité différemment du premier, puisque sur les bords libres la déflexion n'est pas imposée à 0. Il est plus simple de réécrire la somme du second membre comme une somme sur les noeuds de la frontière plutôt que sur les arêtes. Cela nous permettra de traiter plus facilement le cas des noeuds situés à l'interface entre une frontière libre et une frontière encastree ou simplement supportée. Désignons par  $\mathcal{N}_b$  les noeuds de la frontière du maillage, et par les indices  $f$  et  $c$  les noeuds libres et fixes. Notons qu'un noeud à l'interface entre une frontière libre et une frontière fixe (encastree ou simplement supportée) est fixe. On peut réécrire le second terme ci-dessus comme suit :

$$\sum_{s \in \mathcal{E}_b} (M_{nt}(w) v n_{\partial s})_{\partial s} = \sum_{o \in \mathcal{N}_b} [M_{nt}(w) v]_o.$$

Dans ce contexte, la notation  $[\cdot]_o$  est définie pour un noeud  $o$  comme

$$[f]_o = f(o^+) - f(o^-),$$

où  $o^+$  et  $o^-$  sont deux points infiniment proches du noeud, et situés sur les arêtes de la frontière que le noeud sépare, avec  $o^+$  le noeud correspondant à l'arête qui est traversée en première lorsqu'on parcourt la frontière en gardant le domaine à gauche. On utilise alors les astuces habituelles. Sur un coin libre,  $M_{nt}$  et  $w$  sont continus, tandis que sur un coin fixe, la déflexion est nulle. Par conséquent, on a que la solution exacte satisfait :

$$\sum_{o \in \mathcal{N}_b} [M_{nt}(w) v]_o = \sum_{o \in \mathcal{N}_f} \left[ \langle M_{nt}(w) \rangle_o [v]_o + \langle M_{nt}(v) \rangle_o [w]_o \right] + \sum_{o \in \mathcal{N}_c} \left[ [M_{nt}(w) v]_o + [M_{nt}(v) w]_o \right];$$

où on a défini pour les noeuds la notation  $\langle f \rangle_o = (f(o^+) + f(o^-))/2$ . L'expression est bien symétrique. Des termes de stabilisation sont ensuite ajoutés, dont les expressions sont données ci-dessous :

$$\sum_{o \in \mathcal{N}_f} x_{3,o} [w]_o [v]_o + \sum_{o \in \mathcal{N}_c} (x_{3,o} w_{o^+} v_{o^+} + x_{3,o} w_{o^-} v_{o^-}) + \sum_{s \in \mathcal{E}_i} x_{3,s} ([v][w])_{\partial s}.$$

Finalement la formulation de la méthode numérique est la suivante : il s'agit de trouver une fonction  $w \in D_p(\mathcal{K})$  telle que

$$\begin{aligned}
a(w, v) &= - \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} dA \\
&+ \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \left( \int_s \langle M_{nn}(w) \rangle [v, n] dl + \int_s \langle M_{nn}(v) \rangle [w, n] dl + \int_s x_{1,s} [v, n] [w, n] dl \right) \\
&+ \sum_{s \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_f} \left( - \int_s \langle T_n(w) \rangle [v] dl - \int_s \langle T_n(v) \rangle [w] dl + \int_s x_{2,s} [v] [w] dl \right) \\
&+ \sum_{s \in \mathcal{E}_i} \left( \langle M_{nt}(w) \rangle [v] n_{\partial s} \partial s + \langle M_{nt}(v) \rangle [w] n_{\partial s} \partial s + x_{3,s} ([v] [w]) \partial s \right) \\
&+ \sum_{o \in \mathcal{N}_c} \left[ [M_{nt}(w) v]_o + [M_{nt}(v) w]_o + x_{3,o} w_{o^+} v_{o^+} + x_{3,o} w_{o^-} v_{o^-} \right] \\
&+ \sum_{o \in \mathcal{N}_f} \left[ \langle M_{nt}(w) \rangle_o [v]_o + \langle M_{nt}(v) \rangle_o [w]_o + x_{3,o} [w]_o [v]_o \right] \\
&= \int_A q v dA = b(v) \quad \forall v \in D_p(\mathcal{K}).
\end{aligned}$$

La matrice de raideur résultant de cette formulation se présente comme une matrice par blocs. La taille des blocs est égale au nombre de fonctions de base sur l'élément parent, soit  $(p+1)(p+2)/2$ . La matrice est largement creuse, puisqu'en général les degrés de liberté relatifs à un élément ne sont liés qu'à ceux de ses trois voisins. Comme elle est de plus symétrique et définie positive, à condition que les coefficients de stabilisations soient choisis suffisamment grands, le système linéaire résultant peut être résolu par décomposition de Cholesky. Afin d'optimiser cette méthode de résolution, il est important de minimiser au plus possible la largeur de bande de la matrice. Cela peut se faire en utilisant par exemple par l'algorithme de Cuthill-McKee, qui est parfois déjà implémenté dans les logiciels de maillage. Une autre approche serait d'utiliser une méthode itérative, telle que la méthode des gradients conjugués, mais nous avons observé que cette méthode était plus lente pour les problèmes traités.

### 3.1.2 Traitement de conditions aux limites non homogènes

Pour compléter l'analyse effectuée, le cas des efforts externes autres qu'une simple pression est traité dans cette section. On décompose de nouveau les frontières du domaine de la manière suivante :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c \cup \mathcal{E}_s \cup \mathcal{E}_f$ , où l'on considère maintenant que la déflexion et la rotation sont imposées sur  $\mathcal{E}_c$ , la déflexion et le moment sont imposés sur  $\mathcal{E}_s$ , et l'effort tranchant et le moment sont imposés sur  $\mathcal{E}_f$ . Les différentes grandeurs imposées à la frontières sont notées  $\bar{w}$ ,  $\bar{w}, n$ ,  $\bar{T}_n$  et  $\bar{M}_{nn}$ , où  $\bar{w}$  et  $\bar{w}, n$  sont supposées être des fonctions continues sur la frontière, et en particulier aux coins de la plaque. Dans ce cas, il reste vrai que, pour toute fonction  $v \in D_p(\mathcal{K})$ , la solution exacte du problème satisfait

l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e M_{\alpha\beta}(w) v_{,\alpha\beta} dA + \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( \int_s \langle M_{nn}(w) \rangle [v, n] dl \right. \\
& \quad \left. - \int_s \langle T_n(w) \rangle [v] dl + ([M_{nt}(w) v n_{\partial s}]_{\partial s}) \right) = \int_A qv dA,
\end{aligned}$$

où la régularité de la solution exacte a été exploitée comme expliqué plus haut. Dans un premier temps, on peut utiliser le fait que le moment et l'effort tranchant sont connus sur certaines parties de la frontière. Cela nous permet d'écrire que la solution exacte vérifie la relation :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} dA + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \int_s \langle M_{nn}(w) \rangle [v, n] dl - \sum_{s \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_f} \int_s \langle T_n(w) \rangle [v] dl \\
& + \sum_{s \in \mathcal{E}} ([M_{nt}(w) v n_{\partial s}]_{\partial s}) = \int_A qv dA - \sum_{s \in \mathcal{E}_f \cup \mathcal{E}_s} \int_s \bar{M}_{nn} [v, n] dl + \sum_{s \in \mathcal{E}_f} \int_s \bar{T}_n [v] dl.
\end{aligned}$$

Des termes consistants sont ensuite ajoutés, afin de rendre la forme bilinéaire du membre de gauche symétrique et coercive. Par rapport à ce qui a été fait ci-dessus, il faut tenir compte du fait que  $[w]$  et  $[w, n]$  ne s'annulent plus sur les frontières. A la place, on a  $[w] = \bar{w}$  sur  $\mathcal{E}_f$  et  $[w, n] = \bar{w}, n$  sur  $\mathcal{E}_f \cup \mathcal{E}_s$ . Il faut donc en tenir compte lorsqu'on ajoute les termes. Par exemple, pour une frontière encastree, on traite le terme de moment de la manière suivante :

$$\int_s M_{nn}(w) [v, n] dl \rightarrow \int_s M_{nn}(w) [v, n] dl + \int_s M_{nn}(v) [w, n - \bar{w}, n] dl + \int_s [w, n - \bar{w}, n] [v, n] dl.$$

Finalement, la méthode numérique consiste à trouver  $w \in D_p(\mathcal{K})$  tel que :

$$a(w, v) = b(v) \quad \forall v \in D_p(\mathcal{K}),$$

où  $a(w, v)$  est la même forme bilinéaire que précédemment, et où  $b(v)$  est une forme linéaire définie par :

$$\begin{aligned}
b(v) = & \int_A qv dA - \sum_{s \in \mathcal{E}_f \cup \mathcal{E}_s} \int_s \bar{M}_{nn} [v, n] dl + \sum_{s \in \mathcal{E}_f} \int_s \bar{T}_n [v] dl \\
& + \sum_{s \in \mathcal{E}_c} \int_s M_{nn}(v) \bar{w}, n dl - \sum_{s \in \mathcal{E}_c \cup \mathcal{E}_s} \int_s T_n(v) \bar{w} dl \\
& + \sum_{s \in \mathcal{E}_c} \int_s x_{1,s} [v, n] \bar{w}, n dl + \sum_{s \in \mathcal{E}_c \cup \mathcal{E}_s} \int_s x_{2,s} [v] \bar{w} dl \\
& + \sum_{o \in \mathcal{N}_c} \left[ [M_{nt}(v) \bar{w}]_o + x_{3,o} v_{o^+} \bar{w}_{o^+} + x_{3,o} v_{o^-} \bar{w}_{o^-} \right].
\end{aligned}$$

### 3.1.3 Coercivité de la forme bilinéaire

Dans cette section, on établit des contraintes sur les paramètres de stabilisation afin que la forme bilinéaire apparaissant dans la formulation discrète de Galerkin discontinue soit coercive. La formulation étant compliquée par la présence de frontières libres, on supposera que les frontières sont soit encastées, soit simplement supportées. On peut alors prouver la coercivité pour la norme énergétique suivante, introduite par Hansbo et Larson dans [4] :

$$\begin{aligned} |||u|||^2 = & - \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e M_{\alpha\beta}(u) u_{,\alpha\beta} dA + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_c} \int_s h \langle M_{nn}(u) \rangle_s^2 + h^{-1} [u_{,n}]_s^2 dl \\ & + \sum_{s \in \mathcal{E}} \int_s h^3 \langle T_n(u) \rangle_s^2 + h^{-3} [u]_s^2 dl + \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( (h^2 \langle M_{nt}(u) \rangle_s^2)_{\partial s} + h^{-2} ([u]_s^2)_{\partial s} \right). \end{aligned}$$

Dans cette expression,  $h$  est défini comme  $\sqrt{A/N}$ , où  $A$  est l'aire du domaine, et  $N$  le nombre d'éléments. Avant de passer à la preuve, nous aurons besoin de quelques inégalités, développées dans les paragraphes ci-dessous.

#### Inégalités de trace inverses

Dans un premier temps, introduisons une base de polynômes orthonormaux sur le triangle de référence, que nous définissons ici par  $\Delta = \{x, y | 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ , par rapport au produit scalaire suivant

$$(u, v)_\Delta = \int_\Delta u v dA = \int_0^1 \int_0^x u v dy dx.$$

Cette base, utilisée par T. Warburton et J.S. Westhaven dans [7] pour démontrer les inégalités de trace inverses classiques, est définie comme  $B = \{\psi_{ij}(x, y) | i, j \geq 0, i + j \leq n\}$ , où les polynômes  $\psi_{ij}$  sont définis par :

$$\psi_{ij} = C_{ij} P_i^{0,2j+1}(2x-1) L_j \left( \frac{2y-x}{x} \right) x^j \quad \text{où} \quad C_{ij} = \sqrt{2(i+j+1)(2j+1)},$$

et où  $L_j$  désigne le polynôme de Legendre de degré  $j$  sur  $(-1, 1)$ , et  $P_i^{a,b}$  est un polynôme de Jacobi. Pour rappel, les polynômes de Jacobi sont orthogonaux sur  $(-1, 1)$  dans le sens suivant (voir [18]) :

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx = C^J(\alpha, \beta, n) \delta_{nm}.$$

où  $C^J(\alpha, \beta, n)$  est, par définition :

$$C^J(\alpha, \beta, n) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1) n!},$$

avec  $\Gamma$  est une fonction définie par  $\Gamma(n) = n - 1!$  pour  $n \in \mathbb{N}_0$ . Vérifions que les polynômes ainsi définis forment bien une base orthonormée de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  sur le triangle de référence. On a :

$$(\psi_{ij}, \psi_{kl})_{\Delta} = C_{ij} C_{kl} \int_0^1 \int_0^x P_i^{0,2j+1}(2x-1) L_j \left( \frac{2y-x}{x} \right) x^{j+l} \cdot P_k^{0,2l+1}(2x-1) L_l \left( \frac{2y-x}{x} \right) dy dx.$$

Posons maintenant  $\xi = 2x - 1$  et  $\eta = (2y - x)/x$ . De cette manière, le triangle occupe dans le plan  $\xi\eta$  le domaine  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . On a alors, en utilisant l'orthogonalité des polynômes de Legendre et de Jacobi :

$$\begin{aligned} (\psi_{ij}, \psi_{kl})_{\Delta} &= \frac{1}{4} C_{ij} C_{kl} \int_{-1}^1 P_i^{0,2j+1}(\xi) \left( \frac{\xi+1}{2} \right)^{j+l+1} P_k^{0,2l+1}(\xi) d\xi \int_{-1}^1 L_l(\eta) L_j(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2^{2j+2}} \frac{1}{2j+1} \delta_{lj} C_{ij} C_{kj} \int_{-1}^1 (\xi+1)^{2j+1} P_i^{0,2j+1}(\xi) P_k^{0,2j+1}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2^{2j+2}} \frac{1}{2j+1} \delta_{ik} \delta_{lj} C_{ij}^2 C^J(0, 2j+1, i). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $C^J$ , on obtient :

$$C^J(0, 2j+1, i) = \frac{2^{2j+2}}{2i+2j+2}.$$

Comme  $C_{ij} = \sqrt{2(i+j+1)(2j+1)}$ , on a finalement  $(\psi_{ij}, \psi_{kl}) = 1$ . Comme de plus les polynômes  $\psi_{ij}$  sont bien des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ , cela prouve qu'on a bien une base orthonormale de l'espace.

Nous allons maintenant montrer quelques inégalités, en suivant la démarche de [7]. Soit  $P_p$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $p$  défini sur  $\Delta$ . Commençons par montrer par l'inégalité inverse de trace suivante :

$$\int_0^1 (P_p(1, y))^2 dy \leq (p+1)(p+2) \int_{\Delta} P_p^2 dA.$$

Pour cela, décomposons  $P_p$  dans la base de polynômes orthonormaux :  $P_p = \sum c_{ij} \psi_{ij}$ , où la somme est faite sur les valeurs de  $i, j$  telles que  $i, j \geq 0$  et  $i+j \leq p$ . De cette manière, on a que :

$$\int_{\Delta} P_p^2 dA = \sum_{i,j} c_{ij}^2.$$

Développons l'intégrale sur la frontière de  $\Delta$ , en effectuant le même changement de variable que précédemment, et en tenant compte du fait que

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \quad \text{où par définition} \quad \binom{z}{n} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(z-n+1)}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (P_p(1, y))^2 dy &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} c_{ij} c_{kl} \int_0^1 \psi_{ij}(1, y) \psi_{kl}(1, y) dy \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} c_{ij} c_{kl} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 C_{ij} P_i^{0,2j+1}(1) L_j(\eta) C_{kl} P_k^{0,2l+1}(1) L_l(\eta) d\eta \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} c_{ij} c_{kl} \delta_{lj} 2\sqrt{i+j+1}\sqrt{k+l+1}. \end{aligned}$$

La dernière expression correspond à un produit matriciel. Définissons la matrice implicite dans ce produit comme la matrice par bloc telle que l'élément  $(i, k)$  du bloc  $(j, l)$  est donné par  $2\sqrt{i+j+1}\sqrt{k+l+1}\delta_{lj}$ . Etant donnée la présence de  $\delta_{lj}$ , cette matrice est bloc diagonale. Le produit précédent peut alors s'écrire comme  $c^T M c$ , où  $M$  est la matrice venant d'être définie et  $c$  est le vecteur contenant les  $c_{ij}$ , dans l'ordre imposé par la numérotation choisie pour la matrice. Ce produit est borné par  $\rho c^T c$ , où  $\rho$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $M$ . Comme cette matrice est bloc diagonale, on en déduit que  $\rho$  est égal à la plus grande valeur parmi les valeurs propres des blocs. Chaque bloc étant de rang 1, la valeur propre maximale (et l'unique valeur propre non nulle) du bloc  $j$  est égale à :

$$\rho_j = \sum_{i=0}^{p-j} 2\sqrt{i+j+1}\sqrt{i+j+1} = \sum_{i=0}^{p-j} 2(i+j+1) = (p-j+1)(p+j+2).$$

Cette valeur est maximale pour  $j=0$ , d'où  $\rho = (p+1)(p+2)$ . On en déduit finalement :

$$\int_0^1 (P_p(1, y))^2 dy \leq (p+1)(p+2) \sum_{i,j} c_{ij}^2 = (p+1)(p+2) \int_{\Delta} P_p^2 dA.$$

On peut généraliser cette inégalité à n'importe quel triangle  $T$ , d'aire  $A$ , et n'importe lequel de ses côtés, noté  $C$  et de longueur  $L$ , en faisant un changement de variables vers le triangle qu'on a pris pour référence, ce qui donne

$$\int_C P_p^2 dl \leq \frac{1}{2}(p+1)(p+2) \frac{L}{A} \int_T P_p^2 dA. \quad (3.1)$$

De manière similaire, on montre l'inégalité suivante : pour n'importe quel sommet  $S$  d'un triangle  $T$ , l'inégalité suivante est vérifiée pour tout polynôme  $P_p$  de degré inférieur ou

égal à  $p$  :

$$P_p(S)^2 \leq \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4A} \int_T P_p^2 dA. \quad (3.2)$$

Par changement de variables, cela revient à montrer l'inégalité suivante sur le triangle de référence :

$$P_p(1,1)^2 \leq \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{2} \int_{\Delta} P_p^2 dA.$$

Passons maintenant à la démonstration. En raisonnant comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} (P_p(1,1))^2 &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} c_{ij} c_{kl} \psi_{ij}(1,1) \psi_{kl}(1,1) \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} c_{ij} c_{kl} C_{ij} P_i^{0,2j+1}(1) L_j(1) C_{kl} P_k^{0,2l+1}(1) L_l(1) \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} c_{ij} c_{kl} C_{ij} C_{kl}. \end{aligned}$$

On trouve ici encore un produit matriciel du type  $c^T M c$ , avec cette fois-ci  $M$  une matrice de rang 1. La valeur propre non nulle de cette matrice est la suivante :

$$\lambda = \sum_{i,j} C_{ij}^2 = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{p-i} C_{ij}^2 = 2 \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{p-i} (i+j+1)(2j+1) = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{2}.$$

où les formules de Faulhaber ont été utilisées dans la dernière égalité. Le résultat annoncé suit directement.

Finalement, nous allons montrer une inégalité concernant le gradient du polynôme sur un côté. Dans ce but, on commence par montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial P_p}{\partial x}(1, y) \right)^2 dy \leq C(p) \int_{\Delta} P_p^2 dA,$$

où  $C(p)$  est un polynôme de la variable  $p$ . Etant donné que l'expression de  $\partial P/\partial x$  pour les polynômes orthonormaux du triangle de référence est compliquée, il est beaucoup plus facile de faire une étude numérique. Pour cela, on commence par choisir une base de polynôme facile à utiliser. La solution la plus simple consiste à prendre la base  $\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots\}$ . Le nombre d'éléments de la base est  $n = (p+1)(p+2)/2$ . Tout polynôme  $P_p$  de degré inférieur ou égal à  $p$  peut s'exprimer dans cette base comme  $c^T \phi$ , où  $c$  est un vecteur contenant les coordonnées du polynôme dans la base dont les éléments sont donnés dans  $\phi(x)$ . On a alors :

$$\int_{\Delta} P_p^2 dA = c^T B c \quad \text{où} \quad B_{ij} = \int_{\Delta} \phi_i \phi_j dA$$

et

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial P_p}{\partial x}(1, y) \right)^2 dy = c^T A c \quad \text{où} \quad A_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(1, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(1, y) dy.$$

Intéressons-nous au problème aux valeurs propres généralisé  $Ax = \lambda Bx$ . Comme  $B$  est symétrique et définie positive, cette matrice admet une décomposition de Cholesky,  $B = CC^T$ , et on peut par conséquent ramener le problème à un problème aux valeurs propres classique, faisant intervenir une matrice symétrique :

$$Ax = \lambda Bx \leftrightarrow Ax = \lambda CC^T x \leftrightarrow (C^{-1}AC^{-T})(C^T x) = \lambda (C^T x).$$

Pour ce dernier problème, le théorème spectral garantit l'existence d'une base de vecteurs propres orthonormaux, qu'on peut noter  $C^T x_1, C^T x_2, \dots$ , puisque  $C$  est inversible. Il suit directement que le problème  $Ax = \lambda Bx$  admet une base de vecteurs propres, donnés par  $x_1, x_2, \dots$ , et associés aux mêmes valeurs propres. Par conséquent, tout vecteur  $x$  peut être décomposé dans cette base de vecteurs propres de la façon suivante :  $v = \sum_i \alpha_i x_i$ , et on a :

$$\frac{v^T A v}{v^T B v} = \frac{\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j x_i^T A x_j}{\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j x_i^T B x_j} = \frac{\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_j x_i^T B x_j}{\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j x_i^T B x_j} = \frac{\sum_i \alpha_i^2 \lambda_j}{\sum_i \alpha_i^2} \leq \max_i |\lambda_i|.$$

La dernière égalité vient du fait que  $x_i^T B x_j = (C^T x_i)^T (C^T x_j) = \delta_{ij}$ , par le théorème spectral invoqué plus haut. Comme  $A$  est semi-définie positive, les valeurs propres du problème sont toutes positives ou nulles. Numériquement, on trouve par interpolation que la valeur propre maximale est exactement égale à  $p(p+1)^2(p+2)^2(p+3)/3$ , ce qui nous permet d'obtenir finalement :

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial P_p}{\partial x}(1, y) \right)^2 dy \leq \frac{1}{3} p(p+1)^2(p+2)^2(p+3) \int_{\Delta} P_p^2 dA.$$

De la même manière, on peut établir l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial P_p}{\partial y}(1, y) \right)^2 dy \leq C'(p) \int_{\Delta} P_p^2 dA.$$

Une expression analytique pour le polynôme  $C'(p)$  n'a pas été trouvée. On trouve néanmoins, numériquement, que la fonction  $C'(p)$  est bornée par  $C(p)$ , pour toutes les valeurs de  $p$ , et par conséquent :

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial P_p}{\partial y}(1, y) \right)^2 dy \leq C(p) \int_{\Delta} P_p^2 dA.$$

Ces inégalités nous permettent de borner la norme du gradient sur la frontière :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\nabla P_p(1, y) \cdot \nabla P_p(1, y)) dy &= \int_0^1 \left( \frac{\partial P_p}{\partial x}(1, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial P_p}{\partial y}(1, y) \right)^2 dy \\ &\leq \frac{2}{3} p(p+1)^2(p+2)^2(p+3) \int_{\Delta} P_p^2 dA. \end{aligned}$$

Ce résultat peut être généralisé à un triangle quelconque du plan  $xy$ . Tout triangle  $T$  peut être ramené, via un changement de coordonnées, au triangle de référence. On appelle  $\xi$  et  $\eta$  les coordonnées dans le triangle de référence. L'application affine liant les coordonnées d'un point dans le plan  $xy$  à ses coordonnées dans le plan  $\xi\eta$  peut s'écrire  $\boldsymbol{\xi} = A\mathbf{x} + b$ , ou en notation indicielle, en utilisant la convention d'Einstein :  $\xi_i = a_{ij}x_j + b_i$ . On a alors :

$$\frac{\partial P_p}{\partial x_i} \frac{\partial P_p}{\partial x_i} = a_{ji} a_{ki} \frac{\partial P_p}{\partial \xi_j} \frac{\partial P_p}{\partial \xi_k} \leq \lambda_{max}(AA^T) \frac{\partial P_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial P_p}{\partial \xi_i}, \quad (3.3)$$

où  $\lambda_{max}(AA^T)$  désigne la valeur propre maximale de  $AA^T$ . La matrice  $G = (AA^T)^{-1}$ , appelée le tenseur métrique, lie la longueur d'un segment quelconque dans le plan  $xy$  à ses composantes dans le triangle de référence :

$$\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} = (A^{-1} \Delta \boldsymbol{\xi})^T (A^{-1} \Delta \boldsymbol{\xi}) = \Delta \boldsymbol{\xi}^T (AA^T)^{-1} \Delta \boldsymbol{\xi}.$$

On peut en particulier appliquer cette équation aux segments bas et droite du triangle de référence, dont les vecteurs associés ont pour composantes  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ . Comme ces vecteurs sont envoyés par  $A^{-1}$  vers des vecteurs correspondant aux côtés du triangle  $T$  dans le plan  $xy$ , on en déduit  $g_{11} + g_{22} = \lambda_{min}(G) + \lambda_{max}(G) \leq 2L_{max}^2$ , où  $L_{max}$  désigne la longueur du plus grand côté de  $T$ . Il est aussi bien connu (voir par exemple [19]) que le tenseur métrique lie les aires des surfaces dans les deux systèmes de coordonnées. En notant  $A$  l'aire d'une surface dans le plan  $xy$  et  $A^*$  son aire dans le plan  $\xi\eta$ , on a :

$$A = \sqrt{\det(G)} A^*.$$

Cela implique que l'aire d'un triangle est donnée par  $\sqrt{\det(G)}/2$ , car l'aire du triangle de référence vaut  $1/2$ . Comme le déterminant de  $G$  est égal au produit de ses valeurs propres, on en déduit que ces dernières sont telles que :

$$\begin{cases} \lambda_{min} + \lambda_{max} \leq 2L_{max}^2 \\ \lambda_{min} \lambda_{max} = 4A^2. \end{cases}$$

On a donc :  $\lambda_{min} = 4A^2/\lambda_{max} \geq 2A^2/L_{max}^2 = H_{min}^2/2$ , où  $H_{min}^2$  est la hauteur minimale du triangle  $T$ . Cela nous donne donc finalement, en utilisant l'équation 3.1.3 :

$$\frac{\partial P_p}{\partial x_i} \frac{\partial P_p}{\partial x_i} \leq \frac{2}{H_{min}^2} \frac{\partial P_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial P_p}{\partial \xi_i}.$$

et on en déduit finalement, pour un triangle  $T$  dont le plus grand côté est de longueur  $L_{max}$ , l'inégalité suivante, valable pour n'importe lequel de ses côté, noté  $C$  :

$$\int_C (\nabla P_p \cdot \nabla P_p) dl \leq \frac{L_{max}^3}{A^3} \frac{1}{6} p(p+1)^2(p+2)^2(p+3) \int_T P_p^2 dA. \quad (3.4)$$

### Une inégalité physique

Dans la suite, on désigne par  $k$  et  $K$  les deux valeurs propres du tenseur  $w_{,\alpha\beta}$ , avec  $|k| \leq |K|$ . On montre, en utilisant l'invariance d'une quantité scalaire par changement de repère, que l'égalité suivante est vérifiée pour la densité d'énergie  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(w) &= -M_{\alpha\beta}(w) w_{,\alpha\beta} = D \nu w_{,\gamma\gamma} w_{,\alpha\alpha} + D(1 - \nu) w_{,\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} \\ &= D \nu (k + K)^2 + D(1 - \nu) (k^2 + K^2) \\ &= D(k^2 + K^2 + 2\nu kK) \end{aligned}$$

D'autre part, on calcule facilement que les valeurs propres de  $M_{\alpha\beta} = -D \nu w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} - D(1 - \nu) w_{,\alpha\beta}$  sont égales à

$$\lambda_1 = -D(\nu K + k) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -D(\nu k + K),$$

et par conséquent  $\lambda_1^2, \lambda_2^2 \leq D^2(K^2 + k^2 + 2\nu kK)$ , puisque  $|\nu| \leq 1$ . On en déduit donc que, pour tous vecteurs unitaires  $n_i$  et  $\tilde{n}_i$ , on a :

$$(M_{\alpha\beta} n_\alpha \tilde{n}_\beta)^2 \leq D^2(K^2 + k^2 + 2\nu kK)$$

D'où en utilisant l'expression de  $\mathcal{A}$  :

$$(M_{\alpha\beta} n_\alpha \tilde{n}_\beta)^2 \leq D\mathcal{A} \tag{3.5}$$

### Inégalités pour les termes d'interfaces

Grâce à 3.5, on peut relier les efforts sur les arêtes d'un élément à l'énergie interne. Dans la suite, on désigne par  $|e|$  l'aire d'un élément  $e$ , par  $L_{max}(e)$  la longueur du plus grand côté de  $e$ , et par  $|s|$  la longueur d'une arête  $s$ . En se servant de 3.5 et 3.1, on a :

$$\int_s M_{nn}(u)^2 dl \leq \frac{|s|}{|e|} \mathcal{P}_1(p) \int_e M_{nn}(u)^2 dA \leq \frac{D|s|}{|e|} \mathcal{P}_1(p) \int_e \mathcal{A}(u) dA \tag{3.6}$$

Le terme d'effort tranchant effectif requiert un peu plus de travail. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de trace inverse 3.4, et l'inégalité 3.5 :

$$\begin{aligned}
\int_s T_n(u)^2 dl &= \int_s (M_{nn,n}(u) + 2M_{nt,t}(u))^2 dl \\
&\leq \int_s M_{nn,n}(u)^2 dl + 4 \int_s M_{nt,t}(u)^2 dl + 4 \left( \int_s M_{nn,n}(u)^2 dl \times \int_s M_{nt,t}(u)^2 dl \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 9 \max \left( \int_s M_{nn,n}^2(u) dl, \int_s M_{nt,t}^2(u) dl \right) \\
&\leq 9 \max \left( \int_s \|\nabla M_{nn}(u)\|^2 dl, \int_s \|\nabla M_{nt}(u)\|^2 dl \right) \\
&\leq \frac{L_{max}(e)^3}{|e|^3} \mathcal{P}_2(p) \max \left( \int_e M_{nn}^2 dA, \int_e M_{nt}^2 dA \right) \\
&\leq \frac{DL_{max}(e)^3}{|e|^3} \mathcal{P}_2(p) \int_e \mathcal{A}(u) dA \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant 3.4 et 3.5, on obtient l'inégalité suivante pour le terme de force ponctuelle en un noeud  $n$  de l'élément  $e$  :

$$(M_{nt}(u)^2)_n \leq \frac{1}{|e|} \mathcal{P}_3(p) \int_e M_{nt}(u)^2 dA \leq \frac{D}{|e|} \mathcal{P}_3(p) \int_e \mathcal{A}(u) dA \tag{3.8}$$

Dans ces expressions, les polynômes  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(p) &= \frac{(p-1)p}{2} \\
\mathcal{P}_2(p) &= \frac{3}{2} (p-2)(p-1)^2 p^2 (p+1) \\
\mathcal{P}_3(p) &= \frac{(p-1)^2 p^2}{4}
\end{aligned}$$

### Preuve de la coercivité de la forme bilinéaire

On a maintenant les outils nécessaires à la preuve de la coercivité de la forme bilinéaire de la formulation de Galerkin discontinue. Le raisonnement étant étant très similaire à celui fait pour le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli, il est simplement ébauché. On a, en supposant toujours qu'il n'y ait pas de frontière libre dans le problème, que :

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= - \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e M_{\alpha\beta}(u) u_{,\alpha\beta} dA + \sum_{s \in \mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_e} \left( 2 \int_s \langle M_{nn}(u) \rangle [u, n] dl + \int_s x_{1,s} [u, n] [u, n] dl \right) \\
&\quad + \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( -2 \int_s \langle T_n(u) \rangle [u] dl + \int_s x_{2,s} [u] [u] dl \right) \\
&\quad + \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( 2 \langle \langle M_{nt}(u) \rangle \rangle [u] n_{\partial s} \rangle_{\partial s} + x_{3,s} ([u] [u])_{\partial s} \right)
\end{aligned}$$

Montrons par exemple comment traiter un des termes d'interface, lié à une arête  $s$  de l'intérieur du domaine, connectant les éléments  $e^-$  et  $e^+$ . En utilisant successivement les

inégalités de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Young, et l'inégalité 3.6 :

$$\begin{aligned}
2 \int_s \langle M_{nn}(u) \rangle [u,n] dl &\geq -2 \left( \int_s \langle M_{nn}(u) \rangle^2 dl \times \int_s [u,n]^2 dl \right)^{1/2} \\
&\geq -\frac{1}{\epsilon_{1,s}} \int_s \langle M_{nn}(u) \rangle^2 dl - \epsilon_{1,s} \int_s [u,n]^2 dl \\
&\geq -\frac{1}{2\epsilon_{1,s}} \left( \int_s M_{nn}(u^+)^2 dl + \int_s M_{nn}(u^-)^2 dl \right) - \epsilon_{1,s} \int_s [u,n]^2 dl \\
&\geq -\frac{1}{2\epsilon_{1,s}} \left( \mathcal{C}(s, e^-) \int_{e^-} \mathcal{A}(u) dA + \mathcal{C}(s, e^+) \int_{e^+} \mathcal{A}(u) dA \right) - \epsilon_{1,s} \int_s [u,n]^2 dl
\end{aligned}$$

où les constantes  $\mathcal{C}$  proviennent de 3.6, et sont données par :  $\mathcal{C}(s, e) = D\mathcal{P}_1(p)|s|/|e|$ . En développant tous les termes d'interfaces de la même manière, grâce aux inégalités 3.7 et 3.8, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
a(u, u) &\geq \sum_{e \in \mathcal{K}} \left( 1 - \sum_{s \in \partial e} \left( \frac{C_1(e, s)}{\epsilon_{1,s}} + \frac{C_2(e, s)}{\epsilon_{2,s}} + \frac{C_3(e, s)}{\epsilon_{3,s}} \right) \right) \int_e -M_{\alpha\beta}(u) w_{,\alpha\beta}(u) dA + \\
&\quad \sum_{s \in \mathcal{E}_i U \mathcal{E}_c} \int_s (x_{1,s} - \epsilon_{1,s}) [u,n]^2 dl + \sum_{s \in \mathcal{E}} \int_s (x_{2,s} - \epsilon_{2,s}) [u]^2 dl + \sum_{s \in \mathcal{E}} ((x_{3,s} - \epsilon_{3,s}) [u]^2)_{\partial s}
\end{aligned}$$

où  $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont données respectivement par :

$$\begin{aligned}
C_1(e, s) &= \alpha_s \frac{D|s|}{|e|} \mathcal{P}_1(p) \\
C_2(e, s) &= \alpha_s \frac{DL_{max}(e)^3}{|e|^3} \mathcal{P}_2(p) \\
C_3(e, s) &= \alpha_s \frac{2D}{|e|} \mathcal{P}_3(p)
\end{aligned}$$

où  $\alpha_s$  est une constante égale à 1 si  $s$  est une arête de la frontière du domaine et 1/2 sinon, et où le facteur 2 dans  $C_3$  provient du fait qu'il y a deux sommets par arête. On pourrait utiliser directement ces formules pour dériver les valeurs limites des coefficients de stabilisation. Néanmoins, comme nous recherchons plutôt les ordres de grandeur de ces coefficients qu'une borne très serrée, et que les maillages utilisés dans la suite sont isotropes et réguliers, nous allons simplifier quelque peu le problème, et choisir des coefficients de stabilisation ne dépendant que d'un seul paramètre. Pour cela, nous posons  $\tilde{h} = \min_e (|e|/L_{max}(e))$ , c'est à dire, à un facteur 2 près, la plus petite hauteur des éléments du maillage. L'utilisation de  $\tilde{h}$  nous permet d'obtenir des inégalité simples pour les constantes :

$$\begin{aligned}
C_1(e, s) &\leq \alpha_s D \tilde{h}^{-1} \mathcal{P}_1(p) \\
C_2(e, s) &\leq \alpha_s D \tilde{h}^{-3} \mathcal{P}_2(p) \\
C_3(e, s) &\leq \alpha_s D \tilde{h}^{-2} \mathcal{P}_3(p),
\end{aligned}$$

où on a tenu compte pour la dernière inégalité du fait que  $|e| \geq 2\tilde{h}^2$ , ce qui s'obtient en utilisant la définition de  $\tilde{h}$ . On peut maintenant choisir les coefficients de stabilisation de manière à ce que la forme bilinéaire soit coercive, en raisonnant de la même manière que

pour la poutre d'Euler-Bernoulli. Un choix simple, dans le cas  $p \geq 3$ , consiste à choisir

$$\begin{aligned}x_{1,s} &= 9 f \alpha_s D \tilde{h}^{-1} \mathcal{P}_1(p) \\x_{2,s} &= 9 f \alpha_s D \tilde{h}^{-3} \mathcal{P}_2(p) \\x_{3,s} &= 9 f \alpha_s D \tilde{h}^{-2} \mathcal{P}_3(p),\end{aligned}$$

avec  $f > 1$ . Dans le cas  $p = 2$ , le même raisonnement que celui fait pour le cas des poutres peut être mené, car  $\mathcal{P}_2(p = 2) = 0$ . Dans ce cas, le choix  $x_{2,s} = D \tilde{h}^{-3}$  fournit de bons résultats.

Numériquement, on observe que les bornes des coefficients de stabilisation sont moins précises que dans le cas des poutres. Cela est dû au fait que nous avons utilisé de nombreuses inégalités, et qu'il est impossible que les bornes de toutes ces inégalités soient atteintes en même temps. On trouve en fait, dans les cas  $p = 3$  et  $p = 4$ , que des valeurs propres négatives apparaissent dans le spectre de la matrice de raideur globale lorsque  $f$  est aux alentours de 0.1-0.15, pour des bons maillages.

En pratique, comme la taille caractéristique du maillage  $h$  est plus commode à calculer que  $\tilde{h}$ , tout en étant du même ordre de grandeur pour un maillage uniforme, et que d'autre part les bornes sur les coefficients de stabilisation sont assez lâches, le programme réalisé utilise  $h$  au lieu de  $\tilde{h}$  dans les expressions des coefficients de stabilisation.

### 3.1.4 Convergence de la méthode

Les résultats de convergence pour les plaques, dont les démonstrations sont présentées dans [4], sont semblables à ceux obtenus pour les poutres de Bernoulli :

$$|||u - U||| \leq C \begin{cases} h||u||_3 + h^2||u||_4 & \text{si } p = 2 \\ h^{p-1}||u||_{p+1} & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

$$||u - U|| \leq C \begin{cases} h^2(||u||_3 + h||u||_4) & \text{si } p = 2 \\ h^{p+1}||u||_{p+1} & \text{si } p \geq 3. \end{cases}$$

Nous avons vérifié ces résultats pour une plaque simplement supportée, dont la déflexion est donnée sur le domaine  $[0, 1] \times [0, 1]$  par  $u(x, y) = U_0 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . Les résultats numériques, qui confirment l'ordre de convergence de la méthode, sont illustrés à la figure 3.1. Des tests ont aussi été effectués pour une plaque encastree et la solution exacte  $u(x, y) = U_0 x^2(x - 1)^2 y^2(y - 1)^2$ , confirmant les résultats théoriques.

Un cas-test plus compliqué a aussi été abordé, afin de vérifier que la méthode fonctionne aussi en présence de frontières libres. Il s'agit d'une plaque carrée dont la frontière supérieure est libre, les deux frontières adjacentes sont simplement supportées, et la frontière inférieure est encastree. Ce problème est traité analytiquement par Timoshenko

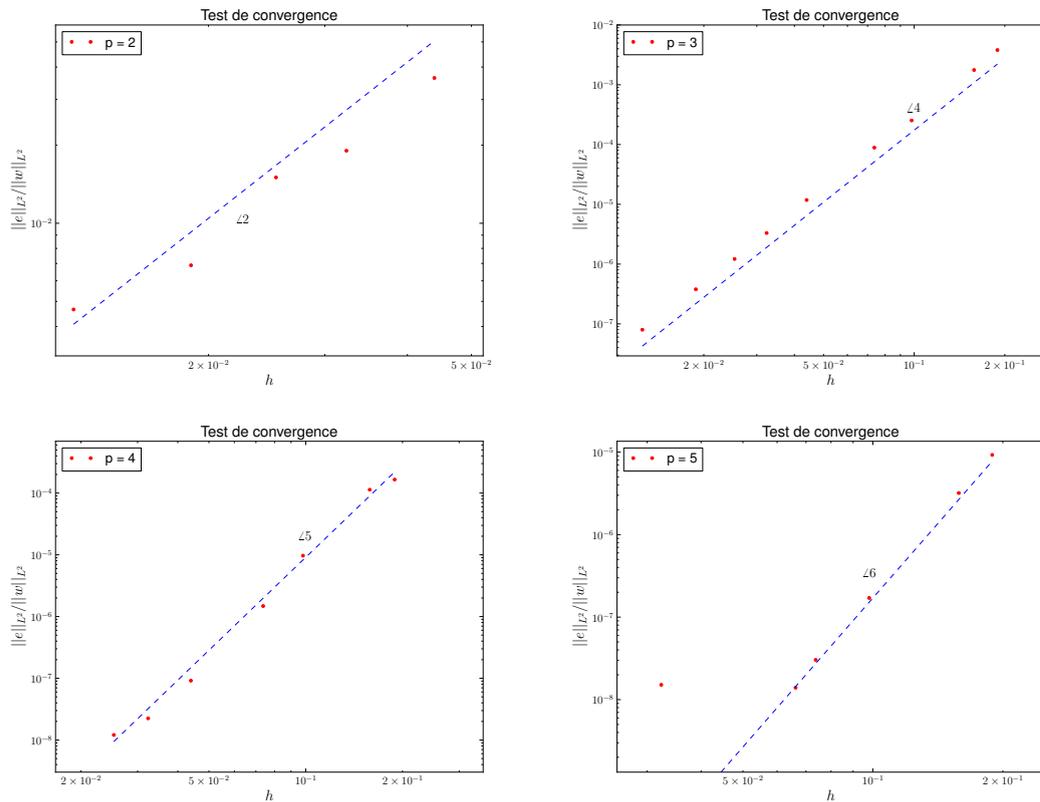


FIGURE 3.1 – Convergence de la méthode pour  $f = 100$  dans le cas  $p = 2$ , et  $f = 1$  dans les autres cas. La convergence est bien en  $\mathcal{O}(h^2)$  dans le cas  $p = 2$  et  $\mathcal{O}(h^{p+1})$  dans le cas  $p \geq 3$ , confirmant les résultats théoriques.

dans [20]. Les conditions aux limites du problème sont :

$$\begin{aligned}
 w = 0 & & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & & \text{pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \\
 w = 0 & & \frac{\partial w}{\partial y} = 0 & & \text{pour } y = 0 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & & \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 & & \text{pour } y = 1.
 \end{aligned}$$

Une fonction satisfaisant toutes ces conditions aux limites est la suivante :

$$w = \sin(\pi x) (1 + A \cosh(\pi y) + B \pi y \sinh(\pi y) + C \sinh(\pi y) + D \pi y \cosh(\pi y)),$$

où les expressions des constantes, qui dépendent du coefficient de Poisson, ne sont pas données ici étant donné qu'elles sont assez compliquées. La charge associée à cette solution est  $q = D \Delta \Delta w = \pi^4 D \sin(\pi x)$ . La solution, ainsi que la convergence de la méthode de Galerkin discontinue pour ce problème, sont illustrées à la figure 3.2.

Notons que les résultats de convergence obtenus ne sont valables que quand la géométrie du domaine est exactement représentée par les éléments. Si la géométrie contient des cercles, par exemple, elle ne peut pas être représentée exactement par des éléments

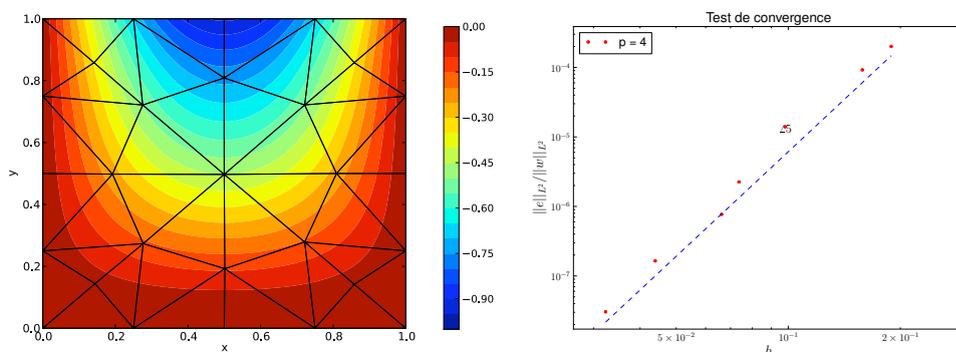


FIGURE 3.2 – Déflexion de la plaque pour le cas-test considéré, dans le cas  $\nu = 0.4$ . (à gauche) et convergence de la méthode dans le cas  $p = 4$  (à droite).

triangulaire. A l'erreur inhérente à la discrétisation s'ajoute alors une erreur résultant de mauvaise qualité de l'approximation de la géométrie du domaine. A titre d'exemple, considérons le cas d'une plaque circulaire encastree, de rayon unitaire, et soumise à une pression uniforme  $p_0$ . La solution exacte du problème est donnée par

$$w(r) = \frac{p_0}{64D}(1 - r^2)^2.$$

Le résultat de la simulation, ainsi que la convergence de la méthode pour ce problème, sont illustrés à la figure 3.3. On observe, aussi bien dans le cas  $p = 3$  que dans le cas  $p = 4$ , que le taux de convergence est bien inférieur à celui observé pour les plaques rectangulaires. De plus, l'erreur est quasi identique dans les deux cas, différant seulement d'environ 1%. Cela indique que l'erreur est essentiellement liée à la représentation de la géométrie. On remarque dans ce cas que le taux de convergence expérimental, obtenu par régression linéaire, est de l'ordre de 2. Ce résultat est assez logique, puisque l'aire du cercle est approximée à l'ordre 2 avec des éléments linéaires.

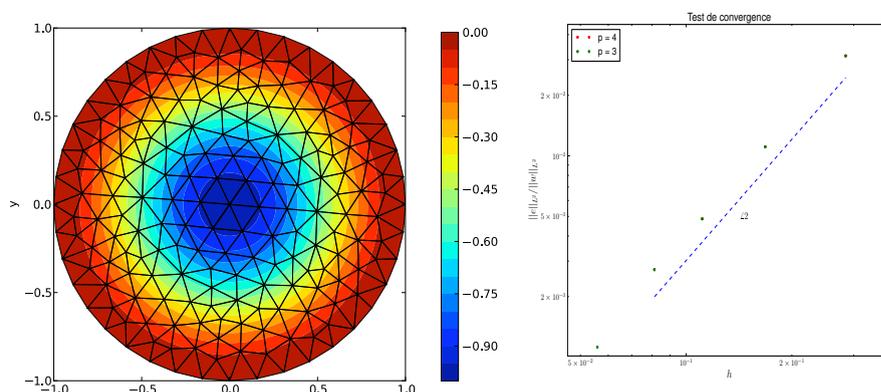


FIGURE 3.3 – Déflexion d'une plaque circulaire encastree, normalisée par rapport à la flèche maximale, obtenue par la méthode des éléments finis discontinus (gauche), et convergence de la méthode lorsqu'elle est appliquée à ce problème (droite).

Considérons maintenant un second exemple un peu plus compliqué, d'une plaque annulaire de rayon intérieur 1 [m] et extérieur 2 [m], dont la frontière intérieure est encastree et la frontière extérieure est libre. On trouve qu'une solution respectant les conditions aux limites est la suivante :

$$w(r) = (r - 1)^4 + \frac{(2(r - 1)^2(55\nu - 52r - 28\nu r + 127))}{3(5\nu + 9)}.$$

De cette expression, on peut déduire le chargement associé. A la figure 3.4, on illustre l'erreur de la représentation géométrique de l'anneau pour un maillage grossier, ainsi que la solution du problème obtenue par la méthode et la convergence de celle-ci. De nouveau, on observe une convergence bien moins bonne que pour les plaques rectangulaires, et des erreurs presque identiques dans les cas  $p = 3$  et  $p = 4$ . La convergence, dans ce cas-ci, est approximativement aussi en  $\mathcal{O}(h^2)$ . Par conséquent, on privilégiera pour ce type de problèmes les méthodes d'ordre 2 ou 3. Une amélioration possible de la méthode serait d'utiliser des éléments d'ordre plus élevé, permettant une meilleure approximation de la frontière. Dans ce cas, un meilleur taux de convergence devrait pouvoir être obtenu.

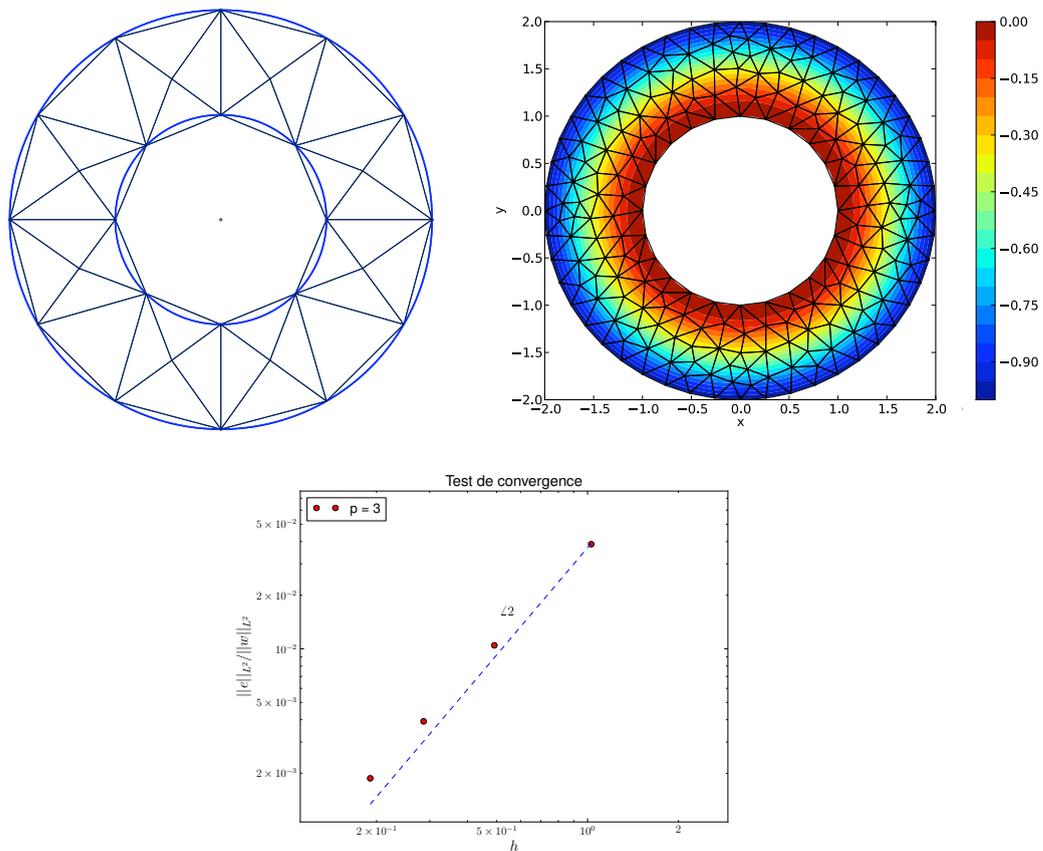


FIGURE 3.4 – Haut : illustration de l'erreur dans l'approximation de la géométrie par un maillage grossier (figure générée par le logiciel *Gmsh*), et solution obtenue par la méthode des éléments finis discontinus dans le cas  $p = 3$ . Bas : convergence de la méthode.

### 3.1.5 Etude des vibrations libres

En guise d'application de la méthode de Galerkin discontinue, la méthode est maintenant utilisée afin de prédire les modes de vibration libre d'une plaque circulaire. On part pour cela de l'équation dynamique des plaques de Kirchhoff-Love, en l'absence de chargement externe :

$$D \Delta \Delta w + \rho h \ddot{w} = 0$$

La formulation de Galerkin discontinue pour ce problème est la suivante :

$$a(w, v) + m(\ddot{w}, v) = 0 \quad \forall v \in D_p(\mathcal{K}) \quad \text{avec} \quad m(\ddot{w}, v) = \rho h \int_{\Omega} \ddot{w} v \, dA$$

Pour obtenir cette formulation, il suffit de remplacer  $q$  par  $-\rho h \ddot{w}$  dans les développements précédents. Le deuxième terme donne lieu à la matrice de masse, qui, comme pour les poutres, a l'avantage d'être bloc-diagonale avec la méthode de Galerkin discontinue. Après avoir choisi une base de polynômes sur l'élément parent, la formulation variationnelle donne un système du type :

$$M \ddot{x}(t) + K x(t) = 0$$

Comme on cherche les modes de vibration du problème, on pose  $x(t) = \hat{x} e^{i\omega t}$ . Les modes et fréquences propres de vibration de la structure peuvent alors être trouvés par résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$K \hat{x} = \omega^2 M \hat{x}$$

Connaître les fréquences de vibration d'une structure peut être très important, notamment en vue d'éviter les phénomènes de résonance. A la figure 3.5, les modes de vibrations d'une plaque circulaire encastree sont présentés, obtenus en utilisant cette méthode. Numériquement, on observe que les modes et fréquences de vibration convergent bien vers les prévisions théoriques. Une étude de la vitesse de convergence n'a toutefois pas été réalisée.

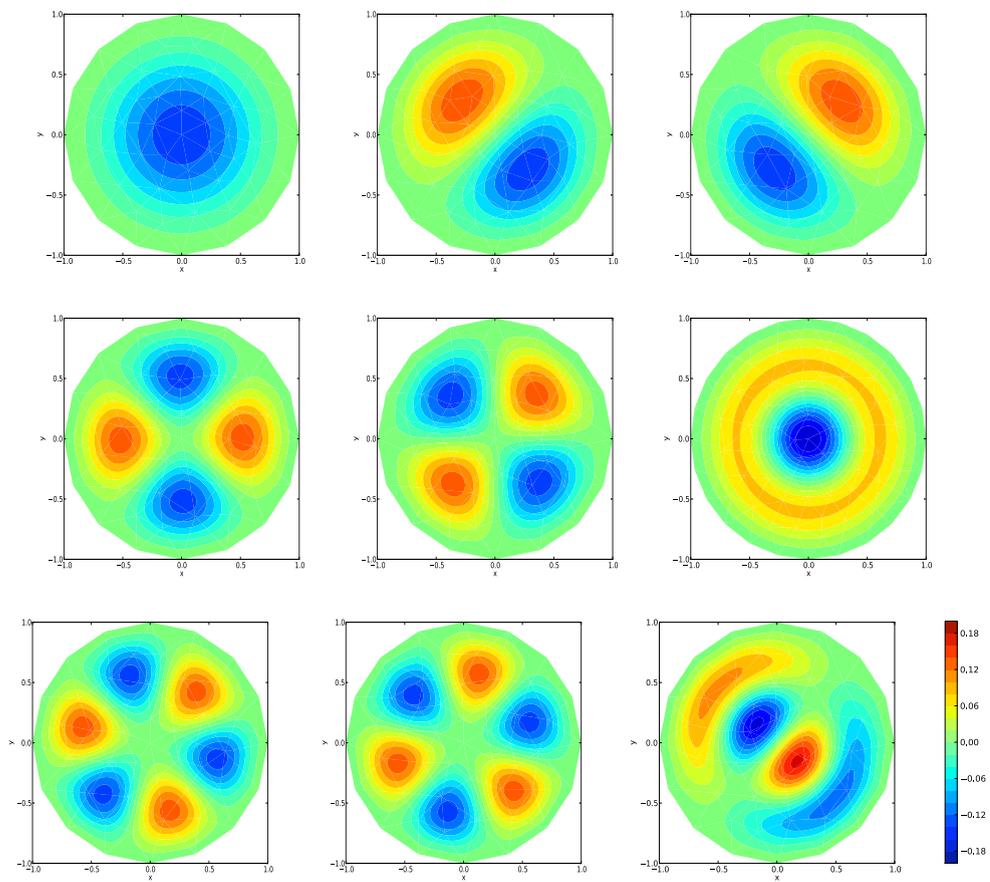


FIGURE 3.5 – Modes de vibration d'une plaque circulaire. Parmi ces 9 premiers modes, 3 peuvent être obtenus par rotation de 3 autres. Les modes identiques à une rotation près ont bien entendu la même fréquence de vibration.

## 3.2 DGM pour le flambement des plaques minces

Dans cette section, le flambement des plaques minces est étudié numériquement. Pour cela, les équations dérivées dans la section 1.3.3 sont utilisées. Pour la simplicité des équations, on supposera que les conditions aux limites du problème de contraintes planes sont de type “contrainte” et non “déplacement”. La résolution de problèmes de flambement se fait traditionnellement en deux parties. Dans un premier temps, un problème de contraintes planes est résolu afin d’obtenir le champ des efforts dans le plan,  $N_{\alpha\beta}^0$ . Dans ce but, les équations suivantes sont utilisées :

$$\begin{cases} N_{11,x}^0 + N_{12,y}^0 = 0 \\ N_{22,y}^0 + N_{12,x}^0 = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

munies des conditions aux frontières vues précédemment. Une fois le problème de contraintes planes résolu, la solution est utilisée pour résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$D \Delta \Delta w - \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} = 0. \quad (3.10)$$

Les conditions aux frontières du problème sont les mêmes que précédemment, sauf en ce qui concerne les frontières libres, pour lesquelles la condition est (voir section 1.3.2) :

$$M_{n,n} + 2M_{nt,t} + \lambda N_{nn}^0 w_{,n} + \lambda N_{nt}^0 w_{,t} = 0.$$

Dans ce travail, une procédure analytique est suivie pour la première partie, dans plusieurs cas simples, tandis que la méthode des éléments finis discontinus est utilisée pour la seconde.

### 3.2.1 Formulation de Galerkin discontinue

Le développement de la formulation du problème aux valeurs propres par la méthode de Galerkin discontinue est similaire au développement fait pour obtenir la formulation de base. Pour commencer, on multiplie 3.10 par une fonction de test  $v$  appartenant à l’espace des polynômes discontinus par morceaux. On intègre ensuite le résultat sur chaque élément, et on somme, ce qui permet d’obtenir :

$$\sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e D \Delta \Delta w v \, dA - \lambda \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} v \, dA = 0.$$

Le premier terme est traité exactement comme précédemment. Pour le second, on utilise l’intégration par parties, ce qui donne :

$$- \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} v \, dA = \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} v_{,\beta} \, dA - \sum_{e \in \mathcal{K}} \sum_{s \in \partial e} \int_s N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} n_{\beta} v \, ds.$$

On peut réécrire le second terme de cette équation comme une somme sur toutes les arêtes, ce qui donne, en tenant compte de la continuité des fonctions propres  $w$  :

$$-\sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} v \, dA = \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} v_{,\beta} \, dA - \sum_{s \in \mathcal{E}} \int_s N_{\alpha\beta}^0 \langle w_{,\alpha} \rangle n_{\beta} [v] \, ds.$$

En tenant compte du terme bi-laplacien, on obtient que toute fonction propre du problème satisfait l'équation suivante :

$$-\sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e M_{\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} \, dA + \lambda \sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} v_{,\beta} \, dA + \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( \int_s \langle M_{nn} \rangle [v_{,n}] \, dl - \int_s \langle T_n + \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} n_{\beta} \rangle [v] \, dl + ([M_{nt} v n_{\partial s}])_{\partial s} \right) = 0.$$

La quantité  $T_n$  est l'effort tranchant effectif, tel que défini précédemment. La somme  $T_n + \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} n_{\beta} T_n + \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} n_{\beta}$  peut s'écrire comme

$$T_n + \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} n_{\beta} = M_{n,n} + 2M_{nt,t} + \lambda N_{nn}^0 w_{,n} + \lambda N_{nt}^0 w_{,t},$$

qui est la quantité s'annulant sur les bords libres de la plaque. On peut donc modifier ce terme de la formulation tout en gardant une formulation consistante :

$$\sum_{s \in \mathcal{E}} \int_s \langle T_n + \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} n_{\beta} \rangle [v] \, dl \rightarrow \sum_{s \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_f} \int_s \langle T_n + \lambda N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} n_{\beta} \rangle [v] \, dl.$$

La suite du raisonnement se base ce qu'on a fait précédemment. Finalement, quand on sépare les termes dépendant de  $\lambda$  de ceux n'en dépendant pas, la méthode de Galerkin discontinue s'écrit de la manière suivante : il s'agit de trouver  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $w \in D_p(\mathcal{K})$  de sorte que :

$$a(w, v) = \lambda b(w, v) \quad \forall v \in D_p(\mathcal{K}),$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire de la section précédente et  $b(\cdot, \cdot)$  est une autre forme bilinéaire, définie par :

$$b(w, v) = -\sum_{e \in \mathcal{K}} \int_e N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} v_{,\beta} \, dA + \sum_{s \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_f} \left( \int_s N_{\alpha\beta}^0 n_{\beta} \langle w_{,\alpha} \rangle [v] \, dl + \int_s N_{\alpha\beta}^0 n_{\beta} \langle v_{,\alpha} \rangle [w] \, dl \right).$$

Le problème discret est lui aussi un problème aux valeurs propres.

Si le tenseur des efforts dans le plan  $N_{\alpha\beta}^0$  est défini négatif, toutes les valeurs propres du problème continu sont positives. En effet, une valeur propre négative signifierait qu'il est possible de faire flamber la structure par des efforts de traction, ce qui est physiquement impossible. Afin d'obtenir le même résultat numériquement, il est nécessaire d'ajouter un terme de stabilisation à la forme bilinéaire  $b$ . Cela peut se faire exactement de la même manière que ce que nous avons fait précédemment, et cette étape ne sera donc pas détaillée.

Quand  $N_{\alpha\beta}^0$  a deux valeurs propres de signes différents, le problème continu admet à la fois des valeurs propres positives et négative. C'est le cas par exemple quand une plaque est en traction dans une direction et en compression dans l'autre. Dans ce cas, la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  a aussi des valeurs propres de signes différents. Cela ne pose généralement aucun problème, car, étant donné les termes de stabilisation présents dans la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , les modes non résolus, présentant des sauts importants aux interfaces, sont associés à des valeurs propres qui sont très grandes (en valeur absolue) en comparaison avec les valeurs propres des modes résolus. Par conséquent, les modes associés aux petites valeurs propres sont tous résolus, et il n'est pas nécessaire d'ajouter des termes de stabilisation dans  $b(\cdot, \cdot)$ .

### 3.2.2 Quelques problèmes de flambement

Dans cette section, la méthode de Galerkin discontinue est utilisée en vue de résoudre quelques problèmes de flambement. On considérera dans ce chapitre des chargements dans le plan très simples. Le premier consiste en une plaque carrée soumise à un effort de compression suivant l'un de ses axes. Notons que les conditions limites sur le déplacement transversal  $w$  ne sont pas précisées à ce stade, puisque elles n'influencent pas la solution du problème en contraintes planes. La solution du problème de contraintes planes, si  $F$  est la charge totale de compression uniformément répartie sur le côté de longueur  $L$ , a été présentée dans la section 1.3.3, et est la suivante :

$$[N_{\alpha\beta}^0] = \frac{F}{L} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant que la plaque est simplement supportée sur ses quatre bords, comme on l'avait supposé dans la section 1.3.3. Les premiers modes de flambement obtenus sont illustrés à la figure 3.6, et correspondent aux fonctions propres analytiques du problème. Ils ont été obtenus en choisissant  $p = 5$ . De plus, la plus petite valeur propre du problème converge bien vers la valeur théorique  $\lambda^* = 4\pi^2 D/LF$ , dérivée dans la section 1.3.3.

En second lieu, nous étudions une plaque rectangulaire comprimée suivant sa longueur. La plaque est supposée libre sur ses deux côtés les plus longs, et simplement supportée sur les deux autres. Si le coefficient de Poisson du matériau est nul, alors les modes de flambement de la plaque doivent correspondre aux modes de flambement d'une colonne simplement supportée à ses deux extrémités. Les modes de flambement sont donc du type

$$w_n = \sin(n\pi x/L),$$

associés à des charges de compression

$$F_n = D l (n\pi/L)^2,$$

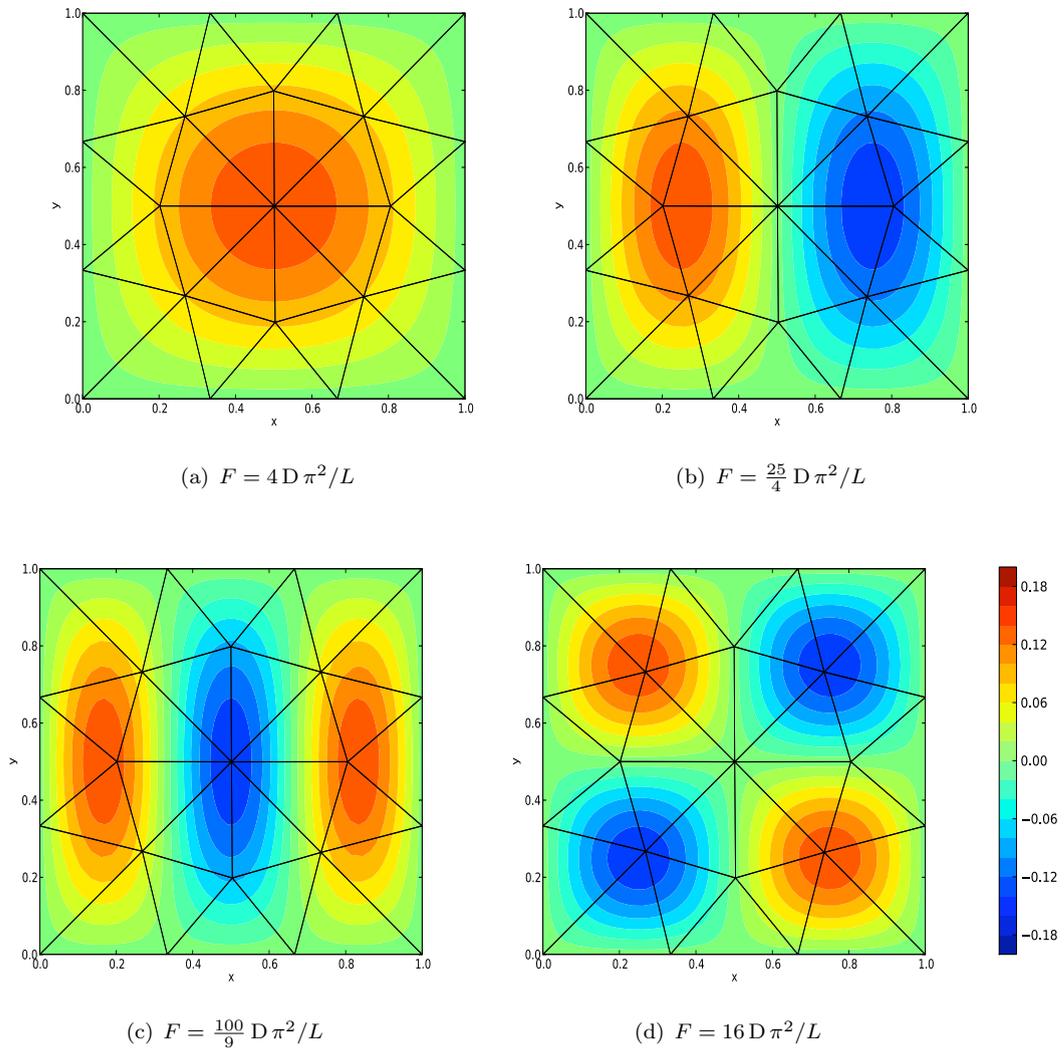


FIGURE 3.6 – Modes de flambement d’une plaque simplement supportée en compression, et charges de compression associées.

où  $L$  et  $l$  sont la longueur et la largeur de la plaque. Pour cet exemple aussi, les valeurs et vecteurs propres donnés par le programme convergent vers les valeurs théoriques. Le troisième mode de flambement est illustré à la figure 3.7, pour un maillage grossier et un maillage plus fin. Comme on peut le voir, les courbes de niveau de la solution obtenue avec le maillage fin semblent parfaitement verticales, ce qui est le résultat attendu.

Pour clotûrer cette section, nous considérerons le cas d’une plaque en cisaillement pur, illustrée à la figure 3.8. On suppose de nouveau que les conditions aux frontières du problème de contraintes planes sont uniquement de type “contraintes”. Si on note  $T$  la force de cisaillement par unité de longueur sur les frontières, alors les efforts dans le plan sont donnés par :

$$[N_{\alpha\beta}^0] = T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

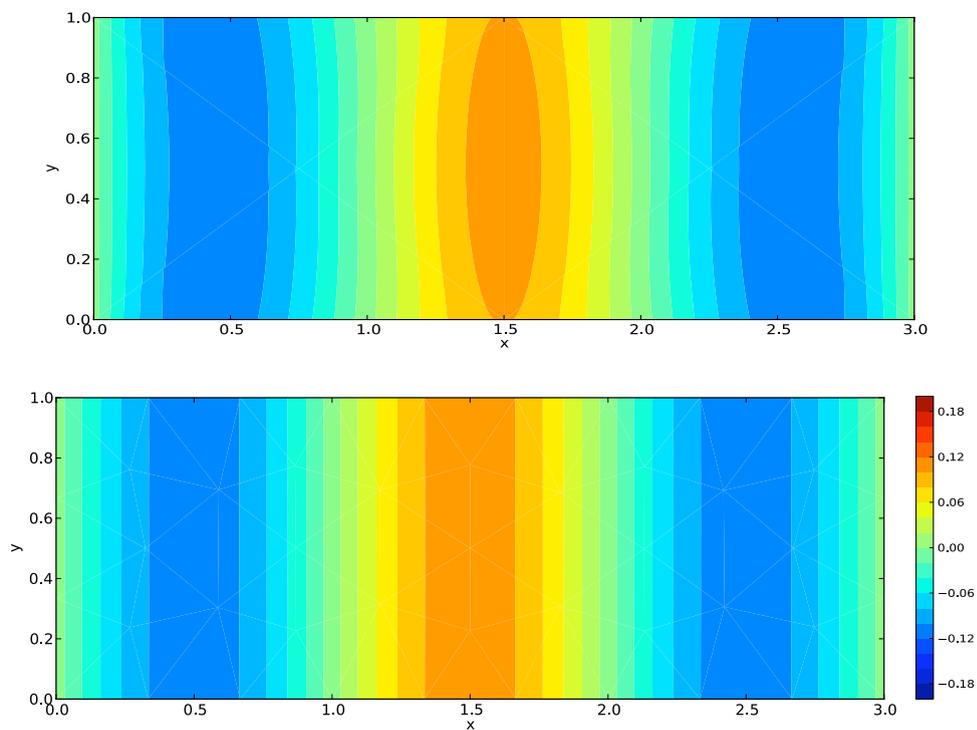


FIGURE 3.7 – Troisième mode de flambement d’une plaque simplement supportée sur deux de ses extrémités et libre sur les deux autres, obtenus avec des polynômes de degré 3. La plaque est en compression suivant sa longueur. Le maillage utilisé pour la figure du dessus est très grossier (8 éléments), et donne une fonction propre beaucoup moins précise que celle obtenue avec un maillage plus fin, en dessous.

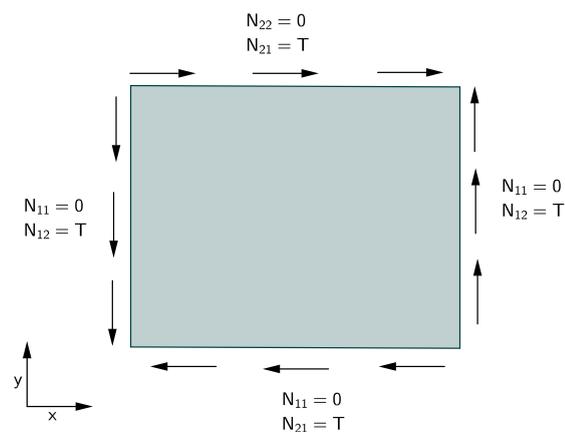


FIGURE 3.8 – Problème de cisaillement

Pour le problème de flexion, on suppose que la plaque est libre sur son côté supérieur et simplement supportée sur les 3 autres. Insistons sur le fait que les conditions aux limites du problème de flexion sont mathématiquement indépendantes des conditions

aux limites du problème de contraintes planes, bien que ce soit parfois difficile à concevoir en réalité. Il n'est pas évident par exemple de s'imaginer une frontière libre (au niveau de la déflexion transversale) mais sur laquelle un effort de cisaillement est appliqué dans le plan de la plaque. Ce problème étant plus compliqué, des résultats analytiques n'ont pas été obtenus en vue d'une comparaison. Etant donné la symétrie du problème, les valeurs propres sont réparties de manière symétrique sur l'axe réel. Physiquement, cela montre que le fait qu'on cisaille la plaque dans un sens ou dans l'autre n'altère pas la charge critique, comme on pouvait s'y attendre intuitivement. Les premiers modes de flambement du problème sont illustrés à la figure 3.9. On remarque que la déflexion maximale des modes a lieu sur la frontière libre, ce qui est en accord avec l'intuition.

Cet exemple clôture cette section, dans laquelle on a prouvé que la méthode de Galerkin discontinue pouvait être généralisée pour résoudre les problèmes de flambement.

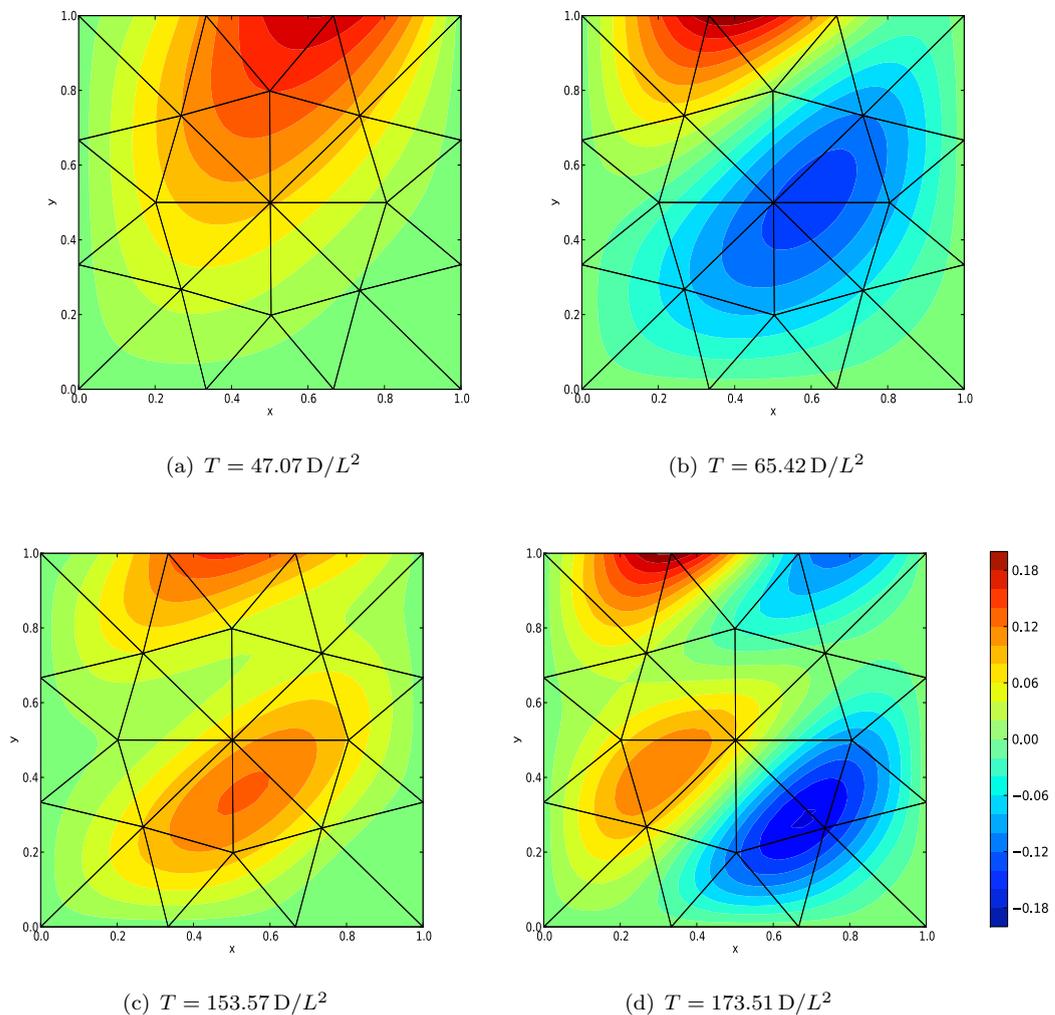


FIGURE 3.9 – Modes de flambement d'une plaque dont trois côtés sont simplement supportés et le quatrième est libre, soumise dans son plan à un effort de cisaillement pur.



# Conclusion

Dans ce travail, il a été démontré que la méthode de Galerkin discontinue peut être utilisée avec succès dans de nombreux problèmes relatifs aux plaques et aux poutres.

La première partie du travail, consacrée aux poutres, a permis de prouver la convergence optimale de la méthode lorsqu'une approximation polynomiale de degré supérieur ou égal à 3 est utilisée, sur base des travaux effectués par P. Hansbo et M.G. Larson dans [4], et ce résultat a pu être confirmé numériquement. Les propriétés de dispersion et de dissipation de la méthode ont pu être obtenues en suivant l'approche de Hu et Atkins présentée dans [6]. Il est ressorti de cette analyse que l'erreur de dissipation de la méthode était nulle, tandis que l'erreur de dispersion variait comme  $\mathcal{O}((kh)^{2p-1})$  pour des maillages uniformes, où  $k$  est le nombre d'onde et  $h$  est la taille des éléments du domaine. La méthode a également été étendue pour permettre la simulation des poutres en grands déplacements, et appliquée à un exemple concret.

Dans la deuxième partie du travail, dédiée aux plaques, la méthode présentée dans [4] a été étendue afin de permettre l'utilisation de frontières libres. Les résultats de convergence de la méthode ont été vérifiés avec succès sur de nombreux cas-tests, et pour divers degrés d'approximation polynomiale. Par rapport à la méthode C/DG, qui se base sur un interpolant  $\mathcal{C}^0$ , les termes de sauts de la formulation sont plus nombreux, et des termes relatifs aux noeuds du maillage sont présents, rendant l'implémentation un peu plus compliquée. Il a aussi été montré dans cette partie comment la méthode pouvait être utilisée en vue d'obtenir les modes et fréquences de vibration libre d'une plaque. Pour finir, à partir des équations de von Kármán pour les plaques en petites déformations-grands déplacements, une méthode de résolution des problème de flambement a été développée, et validée à l'aide de plusieurs exemples.

Tant pour les poutres que pour les plaques, des bornes suffisamment précises ont pu être obtenues pour les coefficients de stabilisation, permettant de garantir la coercivité de la forme bilinéaire impliquée dans la formulation, ainsi que la stabilité de la méthode pour les simulations dynamiques. Ces paramètres peuvent donc être calculés automatiquement par le programme, et ne doivent pas être déterminés par l'utilisateur par essais-erreurs, ce qui constitue une avancée par rapport aux travaux faits précédemment dans le domaine.

Evaluons à présent si la méthode étudiée et le programme réalisé répondent bien aux exigences de flexibilité, de robustesse, de précision et d'efficacité que nous avons fixées.

En ce qui concerne la flexibilité, nous avons montré que la méthode était fidèle à ses promesses, permettant de changer très simplement le degré d'approximation polynomiale, ainsi que le type des conditions aux limites. Pour ce qui est de la robustesse, les bornes que nous avons obtenues concernant les coefficients de stabilisation garantissent la convergence et la stabilité de la méthode, permettant une implémentation robuste. La précision de la méthode, quant à elle, est assurée par son taux de convergence optimal, pour autant que la géométrie soit représentée exactement. Notons néanmoins que le nombre de condition du système linéaire résultant de la discrétisation, étant inversement proportionnel à la quatrième puissance de la taille caractéristique des éléments, impose une limite assez importante à la précision de la solution. Finalement, le programme a été implémenté de manière à être efficace aussi bien au niveau du temps de calcul que de la mémoire utilisée, grâce à un assemblage efficace de la matrice de raideur et par l'utilisation de matrices creuses à faible largeur de bande. Il n'en reste pas moins que le nombre de degrés de liberté élevé de la méthode limite inévitablement son efficacité par rapport à la méthode C/DG.

Pour finir, nous proposons quelques pistes d'amélioration du programme. D'abord, il serait intéressant d'intégrer la possibilité d'utiliser des éléments d'ordre plus élevé, afin de permettre la résolution précise de problèmes définis sur des domaines aux frontières courbes. Ensuite, il serait utile, afin d'améliorer la rapidité du programme, d'utiliser un solveur spécifiquement adapté à la structure par blocs de la matrice de raideur, pour la résolution du système obtenu par la méthode de Galerkin discontinue. Finalement, il serait très intéressant d'étendre le programme aux simulations dynamiques, en tirant profit de la structure bloc-diagonale avantageuse de la matrice de masse, qui constitue un des principaux avantages de la méthode des éléments finis discontinus.

# Bibliographie

- [1] Vincent Legat. MECA1120 : Introduction aux éléments finis, 2012. URL <http://vincent.legat.eu/>.
- [2] Wikipedia. Fonctions d'Argyris — Wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonctions\\_d'Argyris](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonctions_d'Argyris).
- [3] G. Engel, K. Garikipati, T.J.R. Hughes, M.G. Larson, L. Mazzei, and R.L. Taylor. Continuous/discontinuous finite element approximation of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 3669–3750, 2002.
- [4] P. Hansbo and M.G. Larson. A discontinuous Galerkin method for the plate equation. *Calcolo*, 39 : 41–59, 2002.
- [5] G. Becker and L. Noels. A fracture framework for Euler-Bernoulli beams based on a full discontinuous Galerkin formulation/extrinsic cohesive law combination. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011.
- [6] Fang Q. Hu and Harold L. Atkins. Eigensolution Analysis of the Discontinuous Galerkin Method with Non-uniform Grids, Part I : One Space Dimension. *Journal of Computational Physics*, 2002. URL <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a398630.pdf>.
- [7] T. Warburton and J.S. Hesthaven. On the constants in  $hp$ -finite element trace inverse inequalities. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 2765–2773, 2003. URL <http://www.caam.rice.edu/~jjy5/Reidpaper.pdf>.
- [8] Adnan Ibrahimbegovic. *Nonlinear Solid Mechanics : Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods*. Springer, 2006.
- [9] Jean-François Remacle. Notes provisoire pour le cours de mécanique des structures, 2005.
- [10] Issam Doghri. *Mechanics of deformable solids : linear, nonlinear, analytical and computational aspects*. Springer, 2000.

- 
- [11] Vinesh V. Nishawala. Msc thesis : A study of large deflections of beams and plates, 2011. URL <http://mss3.libraries.rutgers.edu/dlr/outputds.php?pid=rutgers-lib:31143&ds=PDF-1>.
- [12] Tomasz Wierzbicki. Plates and Shells, 2012. URL <http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-081j-plates-and-shells-spring-2007/readings/lecturenote.pdf>.
- [13] Béatrice Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations : theory and implementation*. SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 2008.
- [14] Wikipedia. Formule de faulhaber — Wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule\\_de\\_Faulhaber](http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Faulhaber).
- [15] Jean-François Remacle and Koen Hillewaert. Discontinuous Galerkin Methods, Grasmach Course on Advanced Computational Fluid Dynamics, 2011.
- [16] Vincent Legat. FSAB1104 : Mathématiques et méthodes numériques, 2012. URL <http://perso.uclouvain.be/vincent.legat/teaching/bac-q3/data/fsab1104-notes-v6-6.pdf>.
- [17] Ronald H.W. Hoppe. Finite Element Methods. URL [http://www.math.uh.edu/~rohop/spring\\_11/downloads/Chapter4.pdf](http://www.math.uh.edu/~rohop/spring_11/downloads/Chapter4.pdf).
- [18] Wikipedia. Jacobi polynomials — Wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Plagiarism&oldid=5139350>.
- [19] Jean Garrigues. Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus, 2012. URL <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/File/TenseursMMC.pdf>.
- [20] S. Timoshenko and S. Woinowski-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill Book Company, 1959.